Министерство образования Российской Федерации

Уральский государственный педагогический университет

А.П. Ильиных

Числовые системы

Учебное пособие

Екатеринбург 2002

УДК 510.51
И 45

РЕЦЕНЗЕНТ: доктор физико-математических наук, профессор А.А.Махнев

И 45 Ильиных А.П. Числовые системы: Учебное пособие / Урал. гос. пед. ун-т.– Екатеринбург, 2002. – 71 с.

Пособие является курсом лекций по числовым системам и предназначено для студентов дневного и заочного отделений математических факультетов педагогических вузов. В нем дается аксиоматическое построение следующих числовых систем: системы натуральных чисел **N**, кольца целых чисел **Z**, поля рациональных чисел **Q** и поля действительных чисел **R**.

©Ильиных А.П., 2002

Лекция 1. Натуральные числа.

Понятие числа является одним из основных понятий в математике. В курсе «Числовые системы» будут изучаться следующие числовые системы:

N — множество натуральных чисел;

Z — кольцо целых чисел;

Q — поле рациональных чисел;

R — поле действительных чисел.

В алгебре, геометрии, математическом анализе и других математических дисциплинах используются различные свойства указанных числовых систем. Например, коммутативность и ассоциативность сложения и умножения действительных чисел применялись до сих пор как очевидные свойства, не требующие доказательства. Все эти свойства можно вывести из свойств натуральных чисел.

В конце XIX века в работах Дж. Пеано (1891 г.) и Р. Дедекинда (1888 г.) были предложены аксиомы для системы натуральных чисел. Из этих аксиом мы выведем наиболее важные свойства натуральных чисел. Затем будут рассмотрены остальные, указанных выше, числовые системы. Тем самым, будет заложено надежное основание для построения основных математических дисциплин.

Аксиомы Пеано. Рассмотрим аксиоматическое построение теории натуральных чисел. Мы представляем множество натуральных чисел N, состоящим из некоторых объектов, обозначаемых через 1, 2, 3, $\ldots$. При этом признается, что для каждого элемента x из N определен элемент x', также принадлежащий множеству N. Например, $1' = 2$, $5' = 6$. Тем самым, мы считаем, что на множестве натуральных чисел N определена функция S от одного аргумента, где $S(1) = 2$, $S(5) = 6$. Элемент $S(x)$ будем называть *последующим элементом за элементом* x. Наряду с $S(x)$ применяем также обозначение x'. Если $x' = y$, то говорим, что y — последующий элемент за x , а x — предшествующий элемент для y.

При построении аксиоматической теории некоторые утверждения про объекты теории принимаются без доказательства. Они называются аксиомами теории. Другие утверждения должны быть строго доказаны, исходя из аксиом. Такие утверждения называются теоремами. При этом логические средства вывода не формализованы — это общепринятые законы логического вывода в математике.

В качестве аксиом в какой–либо аксиоматической теории принимаются утверждения, которые, как мы полагаем, очевидны по самой природе рассматриваемых объектов. Рассмотрим аксиомы теории натуральных чисел.

Мы признаем, что интуитивно представляемые натуральные числа обладают следующими свойствами.

1. Во множестве N существует число 1, не имеющее предшествующего элемента.

2. Если два натуральных числа различны, то последующие за ними элементы тоже различны.

3. Пусть M — подмножество в N, удовлетворяющее двум условиям: а) $1 \in M$ и б) $x \in M \Rightarrow x' \in M$. Тогда $M = N$.

Р. Дедекинд и Д. Пеано установили, что требований 1—3 достаточно для построения строгой теории натуральных чисел.

Определение множества натуральных чисел. Пусть N — некоторое множество, элементы которого будем называть натуральными числами. Предположим, что на множестве N определена некоторая функция $S(x)$ и применяется обозначение $S(x) = x'$.

Множество N называется множеством натуральных чисел, если выполнены следующие аксиомы:

1. Во множестве N существует элемент 1, не имеющий предшествующего элемента, т.е.

$$\exists 1 \in N \quad \forall x \in N \quad x' \neq 1.$$

2. Если элемента x, y из множестве различны, то и последующие элементы x' и y' также различны, т.е.

$$\forall x, y \in N \quad x \neq y \Rightarrow x' \neq y'.$$

3. Пусть M — подмножество во множестве N, удовлетворяющее следующим двум условиям:

   а) $1 \in M$,

   б) $\forall x \in N \;\; x \in M \Rightarrow x' \in M$.

Тогда $M = N$.

Аксиомы $1 - 3$ называются аксиомами Пеано. Кроме того, аксиома 3 называется аксиомой индукции.

В аксиоме 1 гарантируется существование элемента 1, не имеющего предшествующего элемента. Однако, пока не ясно является ли такой элемент единственным. Ответ на этот вопрос дает следующее утверждение.

Теорема 1.1 *Каждый элемент из множества N, отличный от 1, имеет единственный предшествующий элемент.*

Доказательство. Покажем сначала существование предшествующего элемента, а затем его единственность.

1. Существование. Составим множество M, состоящее из 1 и всех элементов из M, которые имеют предшествующий элемент. Получим

$$M = \{1\} \cup \{x \in N \mid x \text{ имеет предшествующий элемент }\}. \tag{1.1}$$

То, что каждый элемент, отличный от 1, имеет предшествующий элемент означает, что $M = N$. Поэтому достаточно проверить, что $M = N$. Для этой проверки следующим образом воспользуемся аксиомой индукции. Проверим вначале, что для M выполнены ее посылки. Тогда третья аксиома Пеано (аксиома индукции) утверждает $M = N$, что нам и надо.

Итак, нужно проверить, что для M верны посылки аксиомы индукции.

Посылка а) $1 \in M$ — выполнена по правилу построения множества M в (1.1).

Убедимся в справедливости посылки б), т.е. предположим, что $x \in M$, и докажем, что $x' \in M$. Утверждение $x' \in M$ очевидно по заданию множества M в (1.1). Действительно, x' имеет предшествующий элемент x (мы даже не использовали «дано $x \in M$»). Существование доказано.

2. Единственность. Предположим противное, пусть элемент $z \in N$ имеет два различных предшествующих элемента x и y. Тогда $x' = z$ и $y' = z$, где $x \neq y$, что противоречит аксиоме 2. Теорема доказана.

Сформулируем свойства, связанные со знаком «$'$». Они утверждают, что знак «$'$» можно навешивать на равенство и отрицание равенства, а также можно стирать этот знак.

Теорема 1.2 *Справедливы следующие свойства*

1. $x' \neq y' \;\Rightarrow\; x \neq y$.
2. $x \neq y \;\Rightarrow\; x' \neq y'$.
3. $x = y \;\Rightarrow\; x' = y'$.
4. $x' = y' \;\Rightarrow\; x = y$.

Доказательство. В курсе математической логики [4] рассматривается равносильность высказываний. Если высказывание α равносильно высказыванию β (записывается $\alpha \Leftrightarrow \beta$), то высказывания α и β выражают одно и тоже утверждение и взаимозаменяемы. Мы применяем следующую равносильность

$$\alpha \Rightarrow \beta \;\Leftrightarrow\; \overline{\beta} \Rightarrow \overline{\alpha} \tag{1.2}$$

Обозначим через α высказывание $x \neq y$, а через β — высказывание $x' \neq y'$. Вторая аксиома Пеано имеет запись $x \neq y \Rightarrow x' \neq y'$. т.е. имеет вид $\alpha \rightarrow \beta$. Получили свойство 2. Применив равносильность (1.2), получим свойство 4.

Свойство 3 справедливо в силу определения понятия функции. Функция $S(x)$ каждому значению аргумента ставит в соответствие только одно значение функции. Применив равносильность (1.2), получаем свойство 1. Теорема доказана.

Лекция 2. Сложение натуральных чисел.

В этой лекции будет рассмотрена природа и основные свойства операции сложения натуральных чисел. Обсудим интуитивное представление об операции сложения натуральных чисел. Для ее обозначения применяется знак $+$. Мы воображаем, что для любых элементов a и b из множества N однозначно определена их сумма, т.е. элемент, обозначаемый через $a + b$. Поэтому мы имеем бинарную алгебраическую операцию на множестве N, обозначаемую знаком $+$ и называемую сложением.

Мы считаем, что интуитивно представляемая операция сложения имеет два свойства. Первое свойство утверждает, что $a + 1 = a'$ для всех $a \in N$. Например, $2 + 1 = 2' = 3$. Второе свойство утверждает, что $a + b' = (a + b)'$ для всех $a, b \in N$. Например, $2 + 3' = (2 + 3)'$, т.е. $2 + (3 + 1) = (2 + 3) + 1$.

Определение 2.1 *Сложением натуральных чисел называется бинарная алгебраическая операция $+$, определенная на множестве N и удовлетворяющая следующим двум условиям*

$$1. \quad \forall\, a \in N \quad a + 1 = a'. \tag{2.1}$$

$$2. \; \forall\, a, b \in N \quad a + b' = (a + b)'. \tag{2.2}$$

Встает вопрос о существовании и единственности операции сложения натуральных чисел, который мы обсудим позже. Сейчас, предположив существование операции сложения, докажем наиболее важные свойства сложения.

Теорема 2.1 *Операция сложения натуральных чисел ассоциативна.*

Доказательство. Необходимо установить, что

$$\forall\, a, b, c \in N \quad (a + b) + c = a + (b + c). \tag{2.3}$$

Рассмотрим произвольные фиксированные элементы $a, b \in N$ и составим множество

$$M = \{c \in N \mid (a + b) + c = a + (b + c)\}. \tag{2.4}$$

Достаточно доказать, что $M = N$. Проверим, что для множества M выполняются посылки а) и б) аксиомы индукции.

а) Установим, что $1 \in M$, т.е.

$$(a + b) + 1 = a + (b + 1). \tag{2.5}$$

Левая часть этого равенства по первому условию (2.1) из определения операции сложения равна $(a + b)'$, а выражение $(b + 1)$ из правой части равно b'. Поэтому равенство (2.5) имеет вид $(a + b)' = a + b'$. Это равенство верно по второму условию (2.2) из определения операции сложения.

б) Проверим, что $c \in M \quad \Rightarrow \quad c' \in M$. Дано включение $c \in M$, т.е. дано равенство

$$(a+b)+c = a+(b+c). \tag{2.6}$$

Необходимо доказать, что $c' \in M$, т.е.

$$(a+b)+c' = a+(b+c'). \tag{2.7}$$

Левая часть этого равенства по пункту 1 определения операции сложения равна $[(a+b)+c]'$. Заменим в ней $(a+b)+c$ на $a+(b+c)$ по данному равенству (2.6). В правой части из (2.7) по пункту 2 определения операции сложения заменим $(b+c')$ на $(b+c)'$.

Поэтому вместо равенства (2.7) достаточно проверить равенство $[a+(b+c)]' = a+(b+c)'$, а оно верно по по пункту 2 определения операции сложения. Итак, обе посылки аксиомы индукции выполнены. Следовательно, $M = N$. Теорема доказана.

Теорема 2.2 *Операция сложения натуральных чисел коммутативна.*

Доказательство. Необходимо проверить, что

$$\forall\, a, b \in N \quad a+b = b+a. \tag{2.8}$$

Доказательство. Установим вначале частный случай

$$\forall a \in N \quad 1 + a = a + 1. \tag{2.9}$$

Рассмотрим множество $M = \{a \in N \mid 1 + a = a + 1\}$. Проверим, что $M = N$ с помощью аксиомы индукции. Для этого установим истинность ее посылок а) и б).

а) Имеем $1 \in M$, так как при подстановке $a = 1$ в (2.9) получим верное равенство $1 + 1 = 1 + 1$.

б) Пусть дано, что $a \in M$. т.е. $1 + a = a + 1$. Докажем, что $a' \in M$, т.е. $1 + a' = a' + 1$. Имеем, $1 + a' = (1 + a)'$ по пункту 2 определения операции сложения. Учитывая, $1 + a = a + 1$ получим $1 + a' = (a + 1)' = (a')'$. Далее $a' + 1 = (a')'$, т.е. $a' \in M$ и $M = N$. Частный случай доказан.

Установим общий случай. Рассмотрим произвольный элемент $a \in N$ и составим множество $M = \{b \in N \mid a+b = b+a\}$. Докажем, что $M = N$, проверив выполнение посылок а) и б) аксиомы индукции.

а) Имеем $1 \in M$, так как $a + 1 = 1 + a$ по частному случаю.

б) Дано $b \in M$, т.е. $a + b = b + a$. Нужно доказать, что $b' \in M$, т.е.

$$a + b' = b' + a. \tag{2.10}$$

Для левой части L в (2.10) имеем $L = a + b' = (a + b)'$ по пункту 2 определения операциии сложения. Дано $a + b = b + a$. Поэтому $L = (b + a)' = b + a' =$

$b + (a + 1) = b + (1 + a)$ по пунктам 2 и 1 из определения сложения и частному случаю.

Для правой части R из (2.10) имеем: $R = b' + a = (b + 1) + a = b + (1 + a) =$ по свойству ассоциативности. Итак, $L = R$, $a' \in M$, что и нужно. Посылки аксиомы индукции выполняются, значит $M = N$. Теорема доказана.

Из курса алгебры известно, что в случае ассоциативной операции результат операции не зависит от расстановки скобок. Поэтому можно опускать скобки в сумме нескольких натуральных чисел. Например, вместо $(a + b) + (c + d)$ записываем $a + b + c + d$. С учетом коммутативности сложения можно переставлять слагаемые в сумме нескольких чисел. Эти свойства применяем в дальнейшем без каких-либо замечаний.

Существование и единственность операции сложения натуральных чисел. Мы изучили свойства сложения натуральных чисел, однако нам неизвестно, есть ли хотя бы одна операция сложения. Если операция существует, то встает вопрос нет ли другой операции, которая также является сложением.

Для доказательства существования операции сложения, проверим вначале существование некоторых функций на множестве N.

Теорема 2.3 *Для любого элемента a из множества натуральных чисел существует функция $f_a(x) : N \to N$, обладающая следующими свой-*

ствами:

$$1.\ f_a(1) = a', \tag{2.11}$$

$$2.\ f_a(b') = [f_a(b)]'. \tag{2.12}$$

Отметим, что для каждого элемента a подбирается своя функция, обозначаемая знаком f_a, который является слитным символом, не имеющим каких-либо частей.

Доказательство. Рассмотрим подмножество M во множестве N, где

$$M = \{a \in N \mid \text{функция } \ f_a \text{ существует}\}.$$

Достаточно проверить, что $M = N$. Установим это равенство с помощью аксиомы индукции. Докажем истинность ее посылок а) и б).

а) Проверим, что $1 \in M$, т.е. существует функция f_1, обладающая следующими свойствами:

$$f_1(1) = 1', \tag{2.13}$$

$$f_1(b') = [f_1(b)]'. \tag{2.14}$$

Определим функцию f_1 по правилу

$$f_1(x) = x'. \tag{2.15}$$

Тогда $f_1(1) = 1'$, что и нужно в (2.13).

Проверим выполнение второго равенства (2.14) для функции f_1. По правилу задания функции f_1 в (2.15) имеем $f_1(b') = (b')'$ и $[f_1(b)]' = (b')'$ Получили выполнение второго свойства для функции f_1. Итак, $1 \in M$.

б) Проверим, что $a \in M$ влечет $a' \in M$. Дано $a \in M$. Поэтому существует функция $f_a(x)$ с условиями (2.11) и (2.12). Требуется доказать, что $a' \in M$, т.е. нужно найти функцию $f_{a'}(x)$, также удовлетворяющую данным условиям.

Зададим искомую новую функцию $f_{a'}(x)$, через имеющуюся старую функцию $f_a(x)$ по правилу

$$f_{a'}(x) = [f_a(x)]'. \tag{2.16}$$

Проверим выполнение условий (2.11) и (2.12) для новой функции $f_{a'}(x)$. Для записи этих условий нужно заменить букву a на a'. Поэтому, проверяемые условия имеют вид

$$1.\ f_{a'}(1) = (a')', \tag{2.17}$$

$$2.\ f_{a'}(b') = [f_{a'}(b)]'. \tag{2.18}$$

Установим выполнение первого условия. Применим определение (2.16) функции $f_{a'}(x)$ при $x = 1$ и получим $f_{a'}(1) = [f_a(1)]'$. Так как старая функция f_a удовлетворяет условию (2.11), то $f_a(1) = a'$. Поэтому, $[f_a(1)]' = (a')'$, что и нужно.

Проверим выполнение второго условия (2.18). Рассмотрим левую часть $f_{a'}(b')$. По определению функции $f_{a'}(x)$ и второму условию для f_a имеем $f_{a'}(b') = [f_a(b')]' = [(f_a(b))']'$. Правая часть $[f_{a'}(b)]'$ равна $[(f_a(b))']'$ по определению функции $f_{a'}(x)$ и совпадает с левой частью. Итак, $a' \in M$ и пункт б) доказан. Теорема доказана.

Теорема 2.4 *Операция сложения существует.*

Доказательство. Определим операцию + на множестве N, используя функцию $f_a(x)$ из предыдущей теоремы. Пусть $a, b \in N$. Считаем, что

$$a + b = f_a(b). \tag{2.19}$$

Проверим первое условие из определения операции сложения, т.е. $a + 1 = a'$. По определению (2.19) имеем $a + 1 = f_a(1)$. По (2.11) (первое свойство функции f_a) верно $f_a(1) = a'$. Получили $a + 1 = a'$.

Второе условие из определения операции сложения имеет вид $a + b' = (a + b)'$. По определению сложения $a + b' = f_a(b')$. По (2.12) (второму свойству функции f_a верно равенство $f_a(b') = [f_a(b)]'$. Поэтому $a + b' = [f_a(b)]'$. Правая часть $(a + b)'$ имеет вид $[f_a(b)]'$ и равна левой части. Итак, для операции + выполняются два требуемых условия. Теорема доказана.

Теорема 2.5 *Операция сложения определена однозначно.*

Доказательство. Требуется проверить, что не существует двух различных операций сложения $+$ и $\oplus$. Для этого допустим, что обе операции $+$ и $\oplus$ являются операциями сложения. Нужно установить, что $\forall a, b \in N \quad a + b = a \oplus b$, т.е. операции $+$ и $\oplus$ совпадают.

Зафиксируем произвольный элемент $a \in N$ и рассмотрим множество $M = \{b \in N \mid a + b = a \oplus b\}$. Достаточно проверить, что $M = N$.

а) Установим, что $1 \in M$, т.е. $a + 1 = a \oplus 1$. Так как операция $+$ является операцией сложения, то $a + 1 = a'$. Аналогично, операция $\oplus$ является сложением и, поэтому, $a \oplus 1 = a'$. Из $a + 1 = a'$ и $a \oplus 1 = a'$ получаем $a + 1 = a \oplus 1$, что и нужно.

б) Пусть $b \in M$, т.е. $a + b = a \oplus b$. Покажем, что $b' \in M$, т.е. $a + b' = a \oplus b'$. Так как $+$ и $\oplus$ — операции сложения, то $a + b' = (a + b)'$ и $a \oplus b' = (a \oplus b)'$. Применяя $a + b = a \oplus b$, получим $a + b' = a \oplus b'$, т.е. $b' \in M$. Отсюда $M = N$. Теорема доказана.

Лекция 3. Умножение натуральных чисел.

В основе определения умножения лежат два свойства, которые мы приписываем интуитивно представляемому умножению. Первое из свойств утверждает, что $a \cdot 1 = a$ для всех натуральных чисел. Второе свойство имеет вид $a \cdot b' = a \cdot b + a$ для всех $a, b \in N$. Мы согласимся с этим свойством, если учтем, что $b' = b + 1$. Например, $2 \cdot 3' = 2 \cdot (3 + 1) = 2 \cdot 3 + 2$.

Определение 3.1 *Умножением натуральных чисел называется бинарная алгебраическая операция $\cdot$, определенная на множестве N, и удовлетворяющая следующим двум условиям*

$$1.\ \forall a \in N \quad a \cdot 1 = a, \tag{3.1}$$

$$2.\ \forall a, b \in N \quad a \cdot b' = a \cdot b + a. \tag{3.2}$$

Как и в случае сложения, сначала мы выведем законы для умножения, а затем докажем существование и единственность операции умножения.

Теорема 3.1 *Справедливы дистрибутивные законы для сложения и умножения натуральных чисел*

$$\forall a, b, c \in N \ \ (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c, \tag{3.3}$$

$$\forall a, b, c \in N \ \ a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c. \tag{3.4}$$

Доказательство. Проверим сначала первый закон $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$. Рассмотрим произвольные фиксированные элементы $a, b \in N$ и множество $M = \{c \in M \mid (a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c\}$. Нужно проверить, что $M = N$. Установим выполнимость посылок аксиомы индукции для множества M.

а) Докажем, что $1 \in M$. Нужно проверить, что $(a+b)\cdot 1 = a\cdot 1 + b\cdot 1$. По пункту 1 из определения умножения $(a+b)\cdot 1 = a+b,\ a\cdot 1 = a$ и $b\cdot 1 = b$. Поэтому нужно установить $a+b = a+b$, что очевидно.

б) Предположим, что $c \in M$, т.е. $(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$. Проверим, что $c' \in M$, т.е. $(a+b)\cdot c' = a\cdot c' + b\cdot c'$. Преобразуем левую часть $L = (a+b)\cdot c'$ из этого равенства так, чтобы получить правую часть. При этом учитываем, что можно произвольно расставлять скобки и переставлять слагаемые при операции $+$. Из пункта 2 определения операции умножения следует, что $L = (a+b)\cdot c + (a+b)$. По условию$(a+b)\cdot c = a\cdot c + b\cdot c$. Тогда $L = (a\cdot c + b\cdot c) + (a+b) = (a\cdot c + a) + (b\cdot c + b) = a\cdot c' + b\cdot c'$. Получили правую часть $a\cdot c' + b\cdot c'$. Поэтому $c' \in M$, $M = N$, что и надо. Аналогично проверяется справедливость другого дистрибутивного закона. Теорема доказана.

Теорема 3.2 *Операция умножения натуральных чисел ассоциативна.*

Доказательство. Нужно проверить, что $\forall a, b, c \in N \quad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. Рассмотрим произвольные фиксированные элементы $a, b \in N$ и составим множество $M = \{c \in M \mid (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)\}$. Проверим, что $M = N$ с помощью аксиомы индукции. Установим выполнимость ее посылок.

а) Установим $1 \in M$, т.е. проверим равенство $(a \cdot b) \cdot 1 = a \cdot (b \cdot 1)$. Для левой части равенства $L = (a \cdot b) \cdot 1$ имеем $L = (a \cdot b) \cdot 1 = ab$ по первому пункту из определения операции умножения. Для правой части $R = a \cdot (b \cdot 1)$ с учетом $b \cdot 1 = b$ имеем $R = a \cdot (b \cdot 1) = ab$. Итак, $L = R$, что и надо.

б) Предположим $c \in M$, т.е. $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. Установим $c' \in M$, т.е. $(a \cdot b) \cdot c' = a \cdot (b \cdot c')$. Рассмотрим левую часть $L = (a \cdot b) \cdot c'$ По пункту 2 из определения умножения $L = (a \cdot b) \cdot c + ab$. Дано, что $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$. Тогда $L = a \cdot (b \cdot c) + ab$. По дистрибутивному закону $L = a \cdot (b \cdot c + b)$. По пункту 2 из определения умножения $b \cdot c + b = b \cdot c'$. Поэтому $L = a \cdot (b \cdot c')$ совпадает с правой частью проверяемого равенства. Тогда $c' \in M$, что и нужно. Теорема доказана.

Теорема 3.3 *Операция умножения натуральных чисел коммутативна.*

Доказательство. Нужно проверить, что $\forall a, b \in N \quad a \cdot b = b \cdot a$. Докажем сначала частный случай

$$\forall a \in N \quad 1 \cdot a = a \cdot 1. \tag{3.5}$$

Рассмотрим множество $M = \{a \in N \mid a \cdot 1 = 1 \cdot a\}$. Покажем, что $M = N$ с помощью аксиомы индукции. Установим истинность ее посылок.

а) $1 \in M$, так как $1 \cdot 1 = 1 \cdot 1$.

б) Пусть $a \in M$, т.е. $a \cdot 1 = 1 \cdot a$. Докажем, что $a' \in M$, т.е. $a' \cdot 1 = 1 \cdot a'$.

Имеем $a' \cdot 1 = a'$ по пункту 1 из определения умножения. Рассмотрим правую часть $R = 1 \cdot a'$. По определению сложения $a' = a + 1$. Отсюда $R = 1 \cdot (a+1) = 1 \cdot a + 1 \cdot 1 = a \cdot 1 + 1 = a + 1 = a'$ с учетом дистрибутивности и $a \cdot 1 = a$. Следовательно, $a' \in M$, $M = N$ и частный случай доказан.

Рассмотрим общий случай. Зададим произвольный элемент $a \in N$ и составим множество $M = \{b \in N \mid ab = ba\}$. Докажем, что $M = N$.

а) $1 \in M$. Действительно, $a \cdot 1 = 1 \cdot a$ в соответствии с рассмотренным выше частным случаем.

б) Предположим, что $b \in M$, т.е. $ab = ba$. Покажем, что $b' \in M$, т.е. $ab' = b'a$. Обозначим $L = ab'$. По определению умножения $L = a \cdot b + a$. Дано $ab = ba$, откуда $L = b \cdot a + a = b \cdot a + 1 \cdot a$. По дистрибутивности $L = (b+1) \cdot a = b'a$. Отсюда $b' \in M$, $M = N$. Теорема доказана.

Отношение $>$ для натуральных чисел.

Мы завершили доказательство основных свойств сложения и умножения натуральных чисел. Приступим к изучению отношения $>$ для натуральных чисел

Нам потребуется следующий предварительный результат.

Теорема 3.4 *Для произвольных натуральных чисел a и k выполнено утверждение $a + k \neq a$.*

Доказательство. Рассмотрим произвольное $k \in N$ и множество

$$M = \{a \in N \mid a + k \neq a\}. \tag{3.6}$$

Покажем с помощью аксиомы индукции, что $M = N$. Проверим справедливость ее посылок а) и б) для множества M.

а) Имеем $1 \in M$, т.е. $1 + k \neq 1$. Действительно, $1 + k \neq 1$ означает $k' \neq 1$, а это верно по первой аксиоме Пеано.

б) Допустим, что $a \in M$, т.е. $a + k \neq a$ и по коммутативности $k + a \neq a$. Навесив штрихи на $k + a \neq a$, получим $(k + a)' \neq a'$, $k + a' \neq a'$. Поэтому $a' \in M$ и $M = N$. Теорема доказана.

Введем отношение $>$ для натуральных чисел. Мы исходим из следующего интуитивного представления этого понятия. Пусть $a, b \in N$. Число a больше числа b, если существует $k \in N$ с условием $a = b + k$ (число a равно числу b с некоторой «добавкой» k).

Итак, зададим бинарное отношение $>$ на множестве N следующим правилом. Пусть $a, b \in N$. Тогда

$$a > b \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \;\; a = b + k. \tag{3.7}$$

При этом, разумеется, $k \in N$, поскольку у нас пока нет никаких чисел, кроме натуральных.

Установим основные свойства отношения $>$.

Свойство 1. Для всяких чисел $a, b \in N$ справедливо одно и только одно из трех утверждений

$$\begin{aligned} &1) \quad a > b, \\ &2) \quad a = b, \\ &3) \quad b > a. \end{aligned}$$

Доказательство. Покажем вначале выполнимость требования «только одно», т.е.

1) отношения $a > b$ и $b > a$ не могут выполняться одновременно,
2) отношения $a > b$ и $a = b$ не могут выполняться одновременно.

Предположим, что 1) не выполнено, т.е. для некоторых чисел $a, b \in N$ одновременно имеем $a > b$ и $b > a$. Тогда $a = b + k$, $b = a + l$, где $k, l \in N$. Отсюда $a = a+(k+l)$, что противоречит теореме 3.4. Если $a > b$ и $a = b$, то $a = b+k$, и с учетом $a = b$ имеем $a = a + k$, противоречие с теоремой 3.4. Единственность установлена.

Покажем теперь выполнимость хотя бы одного из трех указанных условий 1)–3). Зафиксируем произвольный элемент $a \in N$ и составим множество

$$M = \{b \in N \mid \text{ для } b \text{ и } a \text{ верно хотя бы одно из утверждений 1)–3)}\}.$$

Для доказательства теоремы достаточно проверить, что $M = N$. Воспользуемся аксиомой индукции. Проверим ее посылки а) и б).

а) $1 \in M$. Это верно, если выполнено хотя бы одно из утверждений 1) $a > 1$, 2) $a = 1$, 3) $1 > a$. Если $a = 1$, то выполнено утверждение 2). Если $a \neq 1$, то по теореме 1.1 элемент a имеет предшествующий элемент k. Тогда $a = k'$, т.е. $a = 1 + k$ и $a > 1$. Получили $1 \in M$.

б) Пусть $b \in M$, т.е. выполнено одно из трех условий

$$1)\ a > b, \quad 2)\ a = b, \quad 3)\ b > a.$$

Покажем, что $b' \in M$, т.е. выполнено одно из трех условий

$$1')\ a > b', \quad 2')\ a = b', \quad 3')\ b' > a.$$

Необходимо рассмотреть три случая.

1) Пусть $a > b$, т.е. $a = b + k$. Если $k = 1$, то имеем $a = b + 1$. Тогда $a = b'$ и выполнено условие $2'$). Если $k \neq 1$, то $k = l'$, $k = l + 1$. Тогда $a = b + (l + 1) = (b + 1) + l$, $a = b' + l$. Получили $a > b'$, т.е. случай $1'$).

2) Пусть $a = b$. Тогда $b' = a + 1$, т.е. $b' > a$. Получили случай $3'$).

3) Пусть $b > a$. Тогда $b = a + k$, $b' = a + k'$ и $b' > a$. Получили $3'$). Итак, $b' \in M$ и $M = N$. Свойство доказано.

Свойство 2. Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$, т.е. отношения $>$ транзитивно.

Доказательство. Имеем $a > b$ и $b > c$, т.е. $a = b + k$, $b = c + l$ для некоторых $k, l \in N$. Тогда $a = c + (k + l)$ и, поэтому, $a > c$.

Свойство 3. Справедливы равносильности

$$\begin{aligned} a > b \quad &\Leftrightarrow \quad a + c > b + c, \\ a > b \quad &\Leftrightarrow \quad ac > bc. \end{aligned}$$

Доказательство. Пусть $a > b$. Тогда $a = b + k$ и $a + c = b + c + k$. Отсюда $a+c > b+c$. Обратно, пусть $a+c > b+c$. Если неравенство $a > b$ не выполнено, то по свойству 1 $a = b$ или $b > a$. Если $a = b$, то $a + c = b + c$. Получили одновременное выполнение $a + c > b + c$ и $a + c = b + c$. Это невозможно по свойству 1. Если $b > a$, то выполнено одновременно $b+c > a+c$ и $a+c > b+c$, противоречие. Доказательство второй равносильности аналогично.

Свойство 4. Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$ и $ac > bd$. Поэтому неравенства можно почленно складывать и умножать.

Доказательство. Имеем $a = b + k$ и $c = d + l$. Складывая равенства, получаем $a + c = (b + d) + (k + l)$, откуда $a + c > b + d$. Умножив $a > b$ на c имеем $ac > bc$ по свойству 3. Умножив $c > d$ на b, получим $bc > bd$. Из $ac > bc$ и $bc > bd$ следует $ac > bd$, что и нужно.

Определим новые отношения $<$, $\geqslant$, $\leqslant$ для натуральных чисел следующими правилами.

$$a < b \quad \Leftrightarrow \quad b > a, \tag{3.8}$$

$$a \geqslant b \quad \Leftrightarrow \quad a > b \text{ или } a = b, \tag{3.9}$$

$$a \leqslant b \quad \Leftrightarrow \quad a < b \text{ или } a = b. \tag{3.10}$$

Можно доказать свойства этих отношений, аналогичные свойствам 2)–4).

Свойство 5. Для всех $a \in N$ справедливо утверждение $1 \leqslant a$.

Доказательство. Если $a = 1$, то $1 = a$, и по определению отношения $\leqslant$ имеем $1 \leqslant a$. Если $a \neq 1$, то по теореме 1.1 элемент a имеет предшествующий элемент k. Тогда $a = k'$, $a = 1 + k$, $a > 1$. Поэтому $1 < a$. По определению отношения $\leqslant$ имеем $1 \leqslant a$.

Свойство 6. Если $a < b$, то $a + 1 \leqslant b$. Доказательство самостоятельно.

Из свойств неравенств следует

Теорема 3.5 (*законы сокращения для натуральных чисел*). *Для любых натуральных чисел a, b, c справедливы утверждения*

$$a + c = b + c \Rightarrow a = b, \tag{3.11}$$

$$a \cdot c = b \cdot c \Rightarrow a = b. \tag{3.12}$$

Доказательство. Пусть $a + c = b + c$. Разумеется нельзя применять рассуждения типа «прибавим к обеим частям число $-c$ », поскольку мы располагаем только натуральными числами и знак $-c$ не имеет смысла. Мы докажем, что $a = b$ методом от противного. Пусть равенство $a = b$ не выполнено. По свойству 1 имеет место хотя бы одно из утверждений: 1) $a > b$, 2) $a = b$, 3) $b > a$. Так как равенство $a = b$ не выполнено, то или 1) $a > b$ или 2) $b > a$. Если 1) $a > b$, то $a + c > b + c$ по свойству 3. Получили одновременное выполнение $a+c = b+c$ и $a+c > b+c$. Это невозможно по свойству 1. Итак, $a = b$. Точно также отбрсываем случай $b > a$. То, что $a \cdot c = b \cdot c$ влечет $a = b$ получается аналогично. Теорема доказана.

Разность и частное натуральных чисел. Определим разность и частное натуральных чисел следующими правилами. Пусть $a, b \in N$.

Определение 3.2 *Число $c \in N$ называется разностью натураль-*

ных чисел a и b, если $b + c = a$.

Если число c является разностью чисел a и b, то записываем этот факт в виде

$$c = a - b. \tag{3.13}$$

Определение 3.3 *Число $c \in N$ называется частным натуральных чисел a и b, если $b \cdot c = a$.*

Если число c является частным чисел a и b, то записываем

$$c = \frac{a}{b}. \tag{3.14}$$

Теорема 3.6 *Справедливы следующие два утверждения.*

1. *Разность $a - b$ существует тогда и только тогда, когда $a > b$.*
2. *Разность и частное натуральных чисел определены однозначно.*

Доказательство. Пусть $a, b \in N$ и существует их разность c. Тогда $a = b + c$. По определению отношения $>$ имеем $a > b$. Обратно, пусть $a > b$. По определению отношения $>$ существует элемент $c \in N$ с условием $a = b + c$. По определению разности элемент c есть разность $a - b$.

Покажем теперь единственность разности и частного. Допустим, что оба числа c и c_1 являются разностью чисел a и b. Тогда $b + c = a$ и $b + c_1 = a$. Отсюда $b + c = b + c_1$. По закону сокращения $c = c_1$, что и надо.

Единственность частного проверяется аналогично. Теорема доказана.

Лекция 4. Три разновидности принципа математической индукции.

При доказательстве математических утверждений широко используется метод математической индукции. В его основе лежит принцип математической индукции, который мы сформулируем в трех формах.

Первая форма. *Пусть $A(n)$ — некоторое утверждение о натуральном числе n такое, что :*

1) *утверждение A верно для натурального числа 1, т.е.*

$$A(1) = И\,;$$

2) *справедливость утверждения A для натурального числа n влечет справедливость утверждения A для натурального числа $n+1$, т.е.*

$$A(n) = И \;\Rightarrow A(n+1) = И.$$

Тогда утверждение A справедливо для всех натуральных чисел.

Доказательство. Рассмотрим множество M, состоящее из всех $n \in N$, для которых $A(n)$ — истинно,

$$M = \{\, n \in N \mid A(n) = \text{И}\}.$$

Достаточно проверить, что $M = N$. Применим аксиому индукции. Проверим выполнимость посылок аксиом индукции:

а) $1 \in M$, так как по условию $A(1) =$ И.

б) $n \in M \Rightarrow n' \in M$. Это запись на языке логики того, что справедливость утверждения A для натурального числа n влечет справедливость утверждения A для натурального числа $n' = n + 1$.

По аксиоме индукции $M = N$.

Замечание. Из приведенного доказательства видно, что аксиома индукции — это фактически принцип математической индукции в несколько иной формулировке.

Некоторые математические утверждения справедливы не для всех натуральных чисел, а для для всех чисел, начиная с некоторого числа k. Для их доказательства применяется

Второя форма. *Пусть $A(n)$ — некоторое утверждение о натуральном числе n такое, что:*

1) *утверждение A верно для натурального числа k, т.е.*

$$A(k) = \text{И};$$

2) *справедливость утверждения A для натурального числа $n \geqslant k$ влечет справедливость утверждения A для натурального числа $n+1$, т.е.*

$$A(n) = \text{И},\ \text{где}\ n \geqslant k\ \Rightarrow A(n+1) = \text{И}.$$

Тогда утверждение A верно для всех натуральных чисел $n \geqslant k$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное натуральное число $n \geqslant k$. Тогда $n = k$ или $n > k$. Если $n = k$, то $A(n) = \text{И}$ по условию.

Пусть $n > k$, т.е. $n = k + t$, где $t \in N$. Рассмотрим множество $M = \{t \in N \mid A(k+t) = \text{И}\}$. Достаточно установить, что $M = N$. Для этого используем аксиому индукции. Проверим ее посылки а) и б).

а) Имеем $1 \in M$. Действительно, по условию $A(k) = \text{И}$, и $A(k) = \text{И} \Rightarrow A(k+1) = \text{И}$. Получили $A(k+t) = \text{И}$ при $t = 1$, откуда $1 \in M$.

б) Пусть $t \in M$. Тогда для $n = k+t$ верно $A(n) = \text{И}$. По условию $A(n+1) = \text{И}$, т.е. $A(k+(t+1)) = \text{И}$. Поэтому, $t+1 = t' \in M$, $M = N$, что и нужно.

Третья форма. *Пусть $A(n)$ — некоторое утверждение о натуральном числе n такое, что справедливость утверждения A для всех чисел* *меньших n влечет справедливость утверждения A для числа n. Тогда утверждение A справедливо для всех натуральных чисел.*

Замечание. Пункт 1) из предыдущих формулировок — база индукции, а пункт 2) — шаг индукции. Однако, в третьей разновидности принципа математической индукции нет пункта, аналогичного базе индукции. Предложение $A(1) =$ И следует из условия и является здесь излишним.

Действительно, высказывание $\forall x \in M\ P(x)$ является истинным при $M = \emptyset$ и любом предикате $P(x)$. Для того, чтобы убедиться в этом, рассмотрим его отрицание

$$\exists x \in M \quad \overline{P(x)}.$$

Признать истинным данное отрицание нельзя, потому что оно утверждает, что существует $x \in M$ с каким-то свойством, а множество M является пустым множеством. Тогда по закону исключенного третьего справедливо высказывание $\forall x \in M\ P(x)$.

Если $n = 1$ и M — множество всех элементов x с условием $x < n$, то $M = \emptyset$. Поэтому высказывание $\forall x \in M A(x)$ истинно. Тогда по условию истинно высказывание $A(1)$.

Для доказательства третьей разновидности нам нужны дополнительные результаты. Дадим вначале определение минимального элемента в произвольном подмножестве M из N.

Определение 4.1 *Пусть M подмножество множества N и a — элемент из M. Элемент a называется минимальным элементом множества M, если для любого элемента x во множестве M справедливо неравенство $a \leqslant x$.*

То, что элемент $a \in M$ является минимальным элементом во множестве M можно записать в виде

$$\forall x \in M \quad a \leqslant x \,. \tag{4.1}$$

Теорема 4.1 (*о минимальном элементе*). *Всякое непустое подмножество M множества натуральных чисел имеет минимальный элемент.*

Доказательство. Пусть $M \subseteq N$ и $M \neq \emptyset$. Заключение теоремы получим в несколько шагов.

Шаг 1. Предположим, что $1 \in M$. Тогда искомый минимальный элемент a можно положить равным 1. Действительно, $1 \leqslant x$ для произвольного натурального числа (свойство 5 из свойств неравенств). Тем более $1 \leqslant x$ для всех $x \in M$. Тогда $a = 1$ — минимальный элемент во множестве M и все доказано. Далее считаем, что $1 \notin M$.

Шаг 2. Пусть m произвольный элемент из M. Как отмечено в шаге 1 верно $1 \leqslant m$. Однако равенство невозвожно ни для какого $m \in M$, иначе $1 = m \in M$

и $1 \in M$, что не так. Поэтому

$$\forall m \in M \quad 1 < m. \tag{4.2}$$

Получили, что 1 строго меньше любого элемента из M. Создадим множество L, состоящее из всех элементов l, которые строго меньше любого элемента в M. Имееем

$$L = \{l \in N \mid \forall m \in M \;\; l < m\}. \tag{4.3}$$

По (4.2) $1 \in L$. По условию $M \neq \emptyset$, т.е. существует хотя бы один элемент $m \in M$. Тогда $m \notin L$, иначе по правилу построения (4.3) множества L имели бы $m < m$, что невозможно. Поскольку $m \notin L$, то $L \neq N$. Сопоставим два полученных факта:

$$1 \in L \text{ и } L \neq N. \tag{4.4}$$

и формулировку третьей аксиомы Пеано. Имеем $L \neq N$. Поэтому обе посылки аксиомы Пеано для L выполнены быть не могут, иначе $L = N$. Какая из них нарушена ? Первая аксиома $1 \in M$ выполнена. Значит нарушена вторая аксиома. Построив отрицание аксиомы, получаем

$$\text{существует элемент } \; l \in L \text{ такой, что } \; l' \notin L. \tag{4.5}$$

Шаг 3. Элемент $a = l + 1$ — искомый минимальный элемент во множестве M. Действительно, так как $l \in L$, то по (4.3) для любого $m \in M$ имеем $l < m$.

По свойству 6 из свойств неравенств имеем

$$l + 1 \leqslant m, \text{ где } m \text{ пробегает все элементы из } M. \tag{4.6}$$

Если при всех значениях $m \in M$ в данном неравенстве выполняется строгое неравенство, т.е. $l + 1 < m$ для всех $m \in M$, то $l + 1 = l' \in L$, что не так по (4.5). Итак, $l + 1$ совпадает с некоторым элементом a из M. Условие (4.6) утверждает, что данный элемент $a = l+1$ из множества M удовлетворяет условию $a \leqslant m$, где m пробегает все элементы из M. Поэтому a — минимальный элемент во множестве M. Теорема доказана.

Доказательство третьей разновидности принципа математической индукции. Предположим противное, т.е. утверждение A справедливо не для всех натуральных чисел. Пусть M — множество таких $x \in N$, для которых утверждение A ложно

$$M = \{x \in N \mid A(x) = \text{Л}\}.$$

Тогда $M \neq \emptyset$. По предыдущей теореме в M существует минимальный элемент a. Так как $a \in M$, то $A(a) =$Л.

Рассмотрим произвольный элемент x из N, где $x < a$. Элемент x не содержится в M, иначе из минимальности a получили бы $a \leqslant x$, что несовместимо с данным неравенством $x < a$. Поскольку элемент x не содержится в M, $A(x) =$И.

Итак, мы получили, что для любого x из N, где $x < a$ выполнено условие $A(x) =$И. Тогда по дано утверждение A должно быть истинным и для числа a, т.е. $A(a) =$И — противоречие, так как $a \in M$.

Допущение, что утверждение A справедливо не для всех натуральных чисел привело к противоречию. Поэтому утверждение $A(x)$ истинно для любого $x \in N$.

Лекция 5. Целые числа.

Рассмотрим построение множества целых чисел. Мы интуитивно представляем целые числа в виде $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$. Поэтому следующий пусть построения множества Z кажется наиболее естественным. Мы располагаем множеством натуральных чисел $N = \{1, 2, 3, \dots\}$. Рассмотрим новый символ 0, который назовем числом ноль, а также множество $-N$ из новых символов (отрицательных чисел) $-1, -2, -3, \dots$. Тогда $Z = N \cup \{0\} \cup -N$. Затем введем сложение на множестве Z. При этом сохраним сложение натуральных чисел, а для отрицательных чисел придумаем естественные правила сложения типа:

$$(-a) + (-b) = -(a + b),\ (-a) \cdot (-b) = a \cdot b.$$

Однако такой, на первый взгляд простой и естественный путь, приводит к чрезвычайно трудному обоснованию основных арифметических законов для сложения и умножения целых чисел. Более удобный путь построения множества Z дают идеи абстрактной алгебры.

Вложение алгебры $(N, +, \cdot)$ в область целостности. Мы располагаем алгеброй $(N, +, \cdot)$, где операции $+$ и $\cdot$ коммутативны, ассоциативны, справедливы другие законы, доказанные нами для натуральных чисел. Мы хотим построить коммутативное кольцо Z, содержащее натуральные числа.

Определение 5.1 *Коммутативное кольцо K с единицей $1 \neq 0$ называется областью целостности, если оно не имеет делителей нуля, т.е.*

$$\forall a, b \in K \quad ab = 0 \;\Rightarrow\; a = 0 \vee b = 0.$$

Мы предполагаем, что целые числа, которые нам нужно построить, обладают данными свойствами. Тем самым мы собираемся вложить алгебру $(N, +, \cdot)$ в область целостности Z.

Предположим, что такое кольцо Z уже создано. Анализируя его строение, мы догадаемся до требуемой конструкции множества целых чисел.

Рассмотрим произвольные элементы a, b, принадлежащие множеству натуральных чисел N. Поскольку $N \subseteq Z$, то $a, b \in Z$. В кольце Z существует единственный элемент x с условием

$$b + x = a \tag{5.1}$$

Сопоставим элементу x пару (a, b).

Пусть элементу y соответствует пара (c, d), т.е.

$$d + y = c. \tag{5.2}$$

Рассмотрим условие для равенства элементов x и y.

Убедимся, что

$$x = y \Leftrightarrow a + d = b + c. \tag{5.3}$$

Пусть $x = y$ покажем, что $a+d = b+c$. Перевернем равенство (5.2) и прибавим его к (5.1). Получим $b+c+x = a+d+y$. Прибавив к обеим частям $-x$, получим $a + d = b + c$. Обратно, пусть $a + d = b + c$. Сложив равенства (5.2) и (5.1), получим $b + c + x = a + d + y$. Прибавив к обеим частям элемент $-(a + d)= -(b + c)$, получим $x = y$.

Итак, решению x уравнения (5.1) нужно сопоставлять не отдельную пару (a, b), а все пары (c, d) с условием $a + d = b + c$. Это наводит на мысль рассмотреть множество $M = \{(a, b) \mid a, b \in N\}$, и ввести на нем отношение $\sim$ такое, что

$$(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c.$$

Теорема 5.1 *Отношение $\sim$ является отношением эквивалентности на множестве M.*

Доказательство. Проверим рефлексивность, симметричность и транзитивность данного отношения.

1. Рефлексивность. Условие $(a, b) \sim (a, b)$ означает, что $a + b = b + a$. Это верно в силу коммутативности операции сложения натуральных чисел.

2. Симметричность. Дано $(a, b) \sim (c, d)$. Требуется доказать $(c, d) \sim (a, b)$. Поэтому дано $a + d = b + c$, а требуется доказать $c + b = d + a$. С учетом коммутативности сложения «дано» и «требуется доказать» одно и тоже.

3. Транзитивность. Дано $(a, b) \sim (c, d)$ и $(c, d) \sim (k, l)$, т.е. $a + d = b + c$ и $c + l = d + k$. Нужно доказать $(a, b) \sim (k, l)$, т.е. $a + l = b + k$. Складывая $a + d = b + c$ и $c + l = d + k$ получим $a + l + c + d = b + k + c + d$. Сокращая на $c + d$, имеем $a + l = b + k$, что и надо. Теорема доказана.

Поскольку $\sim$ являеся отношение эквивалентности, то можно рассмотреть классы эквивалентных элементов. При этом сопоставляем элементу x из (5.1) класс $\overline{(a, b)}$, содержащий пару (a, b). Будем отождествлять x и класс $\overline{(a, b)}$. Нам нужно догадаться до закона для сложения и умножения классов

Для этого найдем уравнения, корнями которых являются элементы $x + y$ и xy. Складываем (5.1) и (5.2) и получаем уравнение $(b + d) + (x + y) = a + c$. Итак, элементу $x + y$ ставится в соответствие пара $(a + c, b + d)$. Поэтому мы должны рассмотреть отождествление

$$x + y = \overline{(a + c, b + d)}. \tag{5.4}$$

Для того, чтобы получить уравнение для произведения xy, перемножим (5.1) и (5.2). Получим

$$bd + by + xd + xy = ac. \tag{5.5}$$

Умножим (5.1) на d, получим $bd + xd = ad$. Заменим $bd + xd$ в (5.5) на ad. Имеем $by + ad + xy = ac$. Добавив к обеим частям bd, получим:

$$by + bd + ad + xy = ac + bd. \tag{5.6}$$

Умножим (5.2) на b, получим $by + bd = bc$. Подставим в (5.6) вместо $by + bd$ выражение bc. Тогда $(ad + bc) + xy = ac + bd$. Получаем, что элементу xy сопоставляется пара $(ac + bd, ad + bc)$ и

$$xy = \overline{(ac + bd, ad + bc)}. \tag{5.7}$$

Итак, мы наметили способ построения целых чисел. Приступить к строгому и последовательному изложению этого построения.

Построения кольца целых чисел. Мы имеем множество натуральных чисел N, элементы которого используем в качестве компонент для пар (a, b). Пусть

$$M = \{(a, b)\} \mid a, b \in N\}. \tag{5.8}$$

Введем на множестве M операции сложения $+$ и умножения $\cdot$

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \tag{5.9}$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac + bd,\ ad + bc). \tag{5.10}$$

Легко видеть, что сумма и произведение пар всегда определены и содержатся во множестве M. Поэтому сложение $+$ и умножение $\cdot$ являются алгебраическими операциями на M.

Теорема 5.2 *Операции сложения и умножения на множестве M коммутативны и ассоциативны.*

Доказательство. Пусть $x, y \in M$, $x = (a, b)$, $y = (c, d)$. Тогда

$$x + y = (a + c, b + d), \;\; y + x = (c + a, d + b).$$

Две пары x и y равны тогда и только тогда, когда равны их соответствуюшие компоненты. Поэтому нужно проверить, что $a + c = c + a$ и $b + d = d + b$. Это следует из коммутативности сложения натуральных чисел.

Аналогично проверяются оставшиеся законы. Теорема доказана.

Введем отношение $\sim$ на множестве M

$$(a, b) \sim (c, d) \;\Leftrightarrow\; a + d = b + c. \tag{5.11}$$

В теореме (5.1) установлено, что отношение $\sim$ на множестве M является отношение эквивалентности.

Определение 5.2 *Целым числом называется класс эквивалентных элементов для отношения эквивалентности $\sim$.*

Обозначим множество всех целых чисел через Z. Тогда

$$Z = \{\overline{(a, b)} \mid a, b \in N\}. \tag{5.12}$$

Введем операции сложение и умножение целых чисел по правилам (5.4) и (5.7), которые мы нашли ранее. Итак, пусть $x = \overline{(a, b)}$ и $y = \overline{(c, d)}$ — произвольные целые числа. Тогда

$$\overline{(a, b)} + \overline{(c, d)} = \overline{(a + c, b + d)} \tag{5.13}$$

и

$$\overline{(a, b)} \cdot \overline{(c, d)} = \overline{(ac + bd,\ ad + bc)} \tag{5.14}$$

Однако это определение операции сложение и умножение целых чисел может быть внутренне противочивым (некорректным). Действительно, в (5.4) и (5.14) записаны сумма и произведение элементов x и y. Однако, те же самые элементы x и y можно представить в другой записи $x = \overline{(a_1, b_1)}$ и $y = \overline{(c_1, d_1)}$. Для этого нужно взять другую пару (a_1, b_1) в x и другую пару (c_1, d_1) в y.

Тогда мы должны записать

$$x + y = \overline{(a_1 + c_1, b_1 + d_1)} \tag{5.15}$$

$$x + y = \overline{(a_1c_1 + b_1d_1,\ a_1d_1 + b_1c_1)}. \tag{5.16}$$

Представим, что $\overline{(a+c, b+d)} \neq \overline{(a_1+c_1, b_1+d_1)}$. Тогда неясно, какой из элементов $\overline{(a+c, b+d)}$ или $\overline{(a_1+c_1, b_1+d_1)}$ выбрать в качестве суммы $x+y$ и наше определение суммы некорректно. Те же самые замечания относятся к умножению. Поэтому мы должны доказать, что сумма и произведение классов не зависят от выбора представителей.

Для рассмотрения данной проблемы прервем на некоторое время процесс построения целых чисел и введем новые алгебраические понятия.

Лекция 6. Отношение конгруэнтности.

Напомним, что алгеброй мы называем произвольное множество с заданным на нем некоторым набором алгебраических операций. Если алгебра имеет одну бинарную операцию $\cdot$, то знак операции обычно опускается при записи произведения, вместо $a \cdot b$ записывается ab.

Определение 6.1 *Пусть $(A, \cdot)$ — алгебра с бинарной операцией $\cdot$. Отношением эквивалентности $\sim$ на алгебре $(A, \cdot)$ называется отношением конгруэнтности, если*

$$\forall a, b, c \in A \quad a \sim b \Rightarrow ab \sim bc \quad \text{и} \quad ca \sim cb. \tag{6.1}$$

Замечание 6.1 *Если операция $\cdot$ является коммутативной, то в данном определении можно потребовать лишь*

$$\forall a, b, c \in A \quad a \sim b \Rightarrow ab \sim bc. \tag{6.2}$$

Доказательство очевидно.

Если алгебра A имеет две бинарные операции $+$ и $\cdot$, то отношение эквивалентности $\sim$ является отношением конгруэнтности, если условие (6.1) выполнено для каждой операции в алгебре A.

Правило умножения классов. Пусть $\sim$ — отношение эквивалентности на алгебре $(A, \cdot)$ и {x,y,z, …}— множество классов эквивалентных элементов. Определим операцию умножения классов следующим правилом. Выберем в классе x произвольный элемент a (представитель класса), в классе y выберем элемент b. Вычислим произведение c элементов a и b. Класс z, содержащий элемент c, считаем произведением классов x и y. Итак,

$$\text{Если } a \in x, b \in y, \text{ то произведение классов } x \text{ и } y \\ \text{есть класс } z, \text{ содержащий произведение } ab. \tag{6.3}$$

Обычно класс, содержащий элемент k обозначается через $\overline{k}$. Тогда вместо (6.3) имеем

$$\bar{a}\,\bar{b} = \overline{ab}. \tag{6.4}$$

Теорема 6.1 *Если $\sim$ является отношением конгруэнтности на алгебре A, то данное произведение классов не зависит от выбора представителей.*

Доказательство. Пусть даны классы x и y. Произвольным образом выберем элементы a и b в классах x и y. Получим $a \in x,\ b \in y$. Вычислим произведение ab. Тогда $ab \in z$ для некоторого класса z. По определению умножения классов $xy = z$.

Пусть в классах x и y другим способом выбраны представители a_1, b_1. Имеем $a_1 \in x$, $b_1 \in y$ и $a_1 b_1 \in z_1$ для некоторого класса z_1. Тогда $xy = z_1$. Покажем, что $z = z_1$.

Мы применяем признак равенства классов эквивалентных элементов.

Теорема 6.2 *Пусть на множестве M задано отношение эквивалентности $\sim$. Рассмотрим x и y — произвольные классы эквивалентных элементов. Пусть $a \in x$, $b \in y$ — представители этих классов. Тогда*

$$x = y \;\Leftrightarrow\; a \sim b. \tag{6.5}$$

Доказательство теоремы приводится во вводном курсе математики.

В нашем случае элементы a и a_1 принадлежат одному классу эквивалентности, то же верно для элементов b и b_1. По теореме 6.2

$$a_1 \sim a \text{ и } b_1 \sim b.$$

Домножим первое равенство справа на b_1 (умножение в алгебре A может быть некоммутативным), а второе слева на a. Получим

$$a_1 b_1 \sim a b_1 \quad \text{и} \quad a b_1 \sim ab.$$

Из транзитивности отношения $\sim$ следует $a_1 b_1 \sim ab$. По теореме 6.2 $z_1 = z$. Теорема доказана.

Теорема 6.3 *Пусть A — алгебра с коммутативной (ассоциативной) алгебраической операцией и $\sim$ является отношением конгруэнтности на алгебре A. Тогда произведение классов коммутативно (ассоциативно).*

Доказательство коммутативности. Для произвольных классов $x = \bar{a}$, $y = \bar{b}$ по имеем $xy = \bar{a}\,\bar{b} = \overline{ab}$, $yx = \bar{b}\bar{a} = \overline{ba}$. Так как $ab = ba$, то $xy = yx$. Аналогично доказывается ассоциативнось. Теорема доказана.

Вернемся к построению множества целых чисел. Мы имеем алгебру $A = (M, +, \cdot)$ с отношением эквивалентности $\sim$. При этом $M = \{(a, b) \mid a, b \in N\}$, $(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$, $(a, b) \cdot (c, d) = (ac + bd, ad + bc)$ и $(a, b) \sim (c, d) \Leftrightarrow a + d = b + c$.

Теорема 6.4 *Отношение $\sim$ является отношением конгруэнтности на алгебре A.*

Доказательство. Пусть $x, y, z \in M$ и $x \sim y$. По определению отношения конгруэнтности (6.1) и замечанию (6.2) достаточно проверить равенства $x + z \sim y+z$ ($\sim$ — отношение конгруэнтности для операции $+$) и $x \cdot z \sim y \cdot z$ ($\sim$ — отношение конгруэнтности для операции $\cdot$). Дано $x \sim y$, т.е. $a+d = b+c$. Проверим условие $x + z \sim y + z$, т.е. равенство $(a, b) + (k, l) \sim (c, d) + (k, l)$. Тем самым нужно проверить, что $(a+k, b+l) \sim (c+k, d+l)$, т.е. $a+k+d+l = b+l+c+k$.

Чтобы получить это равенство прибавим к данному равенству $a + d = b + c$ число $k + l$.

Проверим условие $x \cdot z \sim y \cdot z$, т.е. условие

$$(a, b) \cdot (k, l) \sim (c, d) \cdot (k, l).$$

Нужно проверить, что

$$(ak + bl, al + bk) \sim (ck + dl, cl + dk).$$

Это означает

$$ak + bl + cl + dk = al + bk + ck + dl,$$

т.е.

$$(a + d)k + (b + c)l = (a + d)l + (b + c)k.$$

Чтобы получить данное равенство умножим равенство $a + d = b + c$ на число k, а равенство $b + c = a + d$ на число l и сложим. Итак, $x \cdot z \sim y \cdot z$. Теорема доказана.

Напомним, что целые числа — это классы эквивалентных элементов для отношения $\sim$ и множество целых чисел обозначено через Z.

Поскольку $\sim$ является отношением конгруэнтности для алгебры $A = (M, +, \cdot)$ то корректно определено сложение и умножение классов для отношения $\sim$, т.е. целых чисел. Итак, мы имеем следующие правила сложения и умножения целых чисел, т.е. элементов множества Z.

$$\overline{(a,b)}+\overline{(c,d)}=\overline{(a+c,b+d)}, \tag{6.6}$$

$$\overline{(a,b)}\cdot\overline{(c,d)}=\overline{(ac+bd,ad+bc)}. \tag{6.7}$$

Замечание. По теореме 6.3 данное сложение и умножение целых чисел коммутативно и ассоциативно, поскольку коммутативно и ассоциативно сложение и умножение пар из множества M.

Теорема 6.5 *Множество Z является коммутативным кольцом с единицей относительно операций сложения умножения целых чисел.*

Доказательство. Нужно проверить следующие аксиомы коммутативного кольца с единицей

1. $(x+y)+z=x+(y+z)$
2. $\exists 0\ \forall x \quad x+0=x,\ 0+x=x,$
3. $\forall x\ \exists -x \quad x+(-x)=0,\ -x+x=0,$
4. $x+y=y+x,$
5. $x(y+z)=xy+xz,\ (x+y)z=xz+yz,$
6. $(xy)z=x(yz),$
7. $\exists 1\ \forall x \quad x\cdot 1=x,\ 1\cdot x=x,$

8. $xy = yx$.

Коммутативность и ассоциативность сложения и умножения отмечена выше. Поэтому выполнены аксиомы 1, 4, 6, 8. Проверим остальные аксиомы.

Аксиома 2. Обозначим через 0 класс $\overline{(1,1)}$. Опишем пары из этого класса. Имеем $(a,b) \in 0 \Leftrightarrow (a,b) \sim (1,1) \Leftrightarrow a+1 = b+1 \Leftrightarrow a = b$. При этом учтен закон сокращения для натуральных чисел $a+1 = b+1 \Leftrightarrow a = b$. Поэтому

$$0 = \{(a,a) \,|\, a \in N\}.$$

Пусть $x = \overline{(a,b)}$ —произвольный элемент в Z. Докажем, что $x+0 = x$ и $0+x = x$. С учетом коммутативности сложение можно проверить только равенство $x+0 = x$. Имеем $(a,b) \in x$, $(1,1) \in 0$ и $(a,b)+(1,1) = (a+1, b+1) \in x+0$. Равенство $x+0 = x$ означает, что $(a+1, b+1) \sim (a,b)$, т.е. $a+1+b = b+1+a$. Это верно для всех $a, b \in N$.

Аксиома 3. Пусть $x = \overline{(a,b)}$ — произвольный элемент из Z. Справедлива следующая формула для противоположного элемента

$$-x = \overline{(b,a)}. \tag{6.8}$$

Для этого проверим равенство $x + (-x) = 0$. Имеем

$$x + (-x) = \overline{(a,b)} + \overline{(b,a)} = \overline{(a+b, a+b)} = 0.$$

Аксиома 7. Рассмотрим класс $1 = \overline{(1+1,1)}$. Изучим пары из этого класса. Имеем $(b,a) \in 1 \Leftrightarrow (b,a) \sim (1+1,1) \Leftrightarrow b+1 = a+1+1 \Leftrightarrow b = a+1$. Поэтому

$$1 = \{(a+1,a) \mid a \in N\}.$$

Пусть $x = \overline{(a,b)} \in Z$. По правилу умножения классов (6.7) имеем

$$x \cdot 1 = \overline{(a,b)} \cdot \overline{(1+1,1)} = \overline{(a+a+b, a+b+b)}.$$

Равенство классов $x \cdot 1 = x$ означает эквивалентность $(a+a+b, a+b+b) \sim (a,b)$, т.е. $(a+a+b)+b = (a+b+b)+a$, что очевидно. Теорема доказана.

Итак, $(Z,+,\cdot)$ — кольцо. Поэтому мы можем применять основные свойства сложения и умножения целых чисел, отраженные в аксиомах кольца.

Однако у нас еще нет обычной записи множества целых чисел в виде $\{\ldots, -3, -2, -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3, \ldots\}$. Для получения такой записи построим во множестве Z алгебру $(N', +, \cdot)$, изоморфную алгебре $(N, +, \cdot)$.

Для всякого элемента $k \in N$ определим целое число $k' \in Z$. Пусть

$$k' \text{ — класс, содержащий пару } (1+k, 1). \tag{6.9}$$

Обозначим

$$N' = \{k' \mid k \in N\}. \tag{6.10}$$

Имеем $N' \subseteq Z$. Опишем пары класса k'.

Теорема 6.6 *Справедливо равенство*

$$k' = \{(a+k, a) \mid a \in N\}.$$

Доказательство. Имеем $(b, a) \in k' \quad \Leftrightarrow \quad (b, a) \sim (1+k, 1) \quad \Leftrightarrow \quad b+1 = a+1+k \quad \Leftrightarrow \quad b = a+k$. Поэтому k' состоит из всех пар $(a+k, a)$, где $a \in N$. Теорема доказана.

Теорема 6.7 *Справедливы следующие правила для сложения и умножения классов вида k'*

$$k' + l' = (k+l)', \tag{6.11}$$

$$k'l' = (kl)'. \tag{6.12}$$

Доказательство. Имеем $(k+1, 1) \in k'$ и $(l+1, 1) \in l'$. По правилу сложения классов (6.6) имеем $(k+1, 1) + (l+1, 1) \in k' + l'$, т.е.

$$(k+l+1+1, 1+1) \in k' + l'.$$

Далее по определению (6.9) класса $(k+l)'$ имеем

$$(k+l+1, 1) \in (k+l)'.$$

Классы $k' + l'$ и $(k+l)'$ равны, если пары $(k+l+1+1, 1+1)$ и $(k+l+1, 1)$ из этих классов эквивалентны:

$$k' + l' = (k+l)' \Leftrightarrow (k+l+1+1, 1+1) \sim (k+l+1, 1) \Leftrightarrow \\ k+l+1+1+1 = 1+1+k+l+1.$$

Последнее равенства верно, поэтому $k' + l' = (k+l)'$. Доказательство равенства $k'l' = (kl)'$ аналогично. Теорема доказана.

Равенства (6.11) и (6.12) означают, что множество N' замкнуто относительно операций сложения $+$ и умножения $\cdot$. Поэтому получена алгебра $(N', +, \cdot)$.

Теорема 6.8 *Алгебры* $(N, +, \cdot)$ *и* $(N', +, \cdot)$ *изоморфны.*

Доказательство. Алгебры N и N' изоморфны, если существует биективное отображение $f : N \to N'$ со следующими условиями

$$\forall k, l \in N \quad f(k+l) = f(k) + f(l), \tag{6.13}$$
$$\forall k, l \in N \quad f(kl) = f(k)f(l). \tag{6.14}$$

Построим такое отображение f. Зададим его правилом

$$f(a) = a' \in N' \text{ для всех } a \in N.$$

Инъективность. Пусть $f(k) = f(l)$, т.е. $k' = l'$. Тогда пары $(k+1,1) \in k'$ и $(l+1,1) \in l'$ эквивалентны. Поэтому $(k+1,1) \sim (l+1,1)$, т.е. $k+1+1 = 1+l+1$. По закону сокращения $k = l$.

Сюръективность. По определению (6.10) любой элемент из N' имеет вид k' и, поэтому, имеет прообраз $k \in N$. Следовательно, f сюръективно.

Итак, f сюръективно и инъективно, а, поэтому,биективно. Осталось проверить условия изоморфизма (6.13) и (6.14). По определению отображения f эти равенства переписываются в виде $(k+l)' = k' + l'$ и $(kl)' = k'l'$ для всех $k, l \in N$.

Однако эти равенства уже получены в (6.11). Теорема доказана.

Изоморфные объекты в математике считаются одним и тем же объектом. Поэтому мы будем отождествлять элемент $k \in N$ и его образ $k' \in Z$ при изоморфизме f. Получаем $N' = N$ с учетом равенств

$$\overline{(2,1)} = 1,\ \overline{(4,1)} = 3,\ \overline{(5,1)} = 4, \ldots$$

Нетрудно проверить, что N' есть множество всех классов $\overline{(a,b)}$, где $a > b$. Такие классы назовем положительными классами. Классы $\overline{(a,b)}$, где $b > a$, назовем отрицательными классами. Напомним, что при проверке аксиом кольца для множества Z, мы ввели элемент $0 = \overline{(1,1)} = \{(a,a) \mid a \in N\}$. Это нулевой класс. Также при проверке аксиом кольца установлена формула

$-\overline{(a, b)} = \overline{(b, a)}$ для противоположного элемента. Тем самым множество отрицательных классов имеет вид $-N' = \{ -x \mid x \in N'\}$.

Теорема 6.9 *Множество Z имеет разбиение вида*

$$Z = N \cup \{0\} \cup -N, \tag{6.15}$$

где $-N = \{ -x \mid x \in N\}$. При этом учитывается отождествление $N' = N$.

Доказательство. Для произвольного класса $x \in Z$ верно одно и только одно из трех условий: 1) x — положительный класс, 2) x — нулевой класс, 3) x — отрицательный класс. Тем самым выполнено одно и только одно из трех условий

$$1)\ x \in N,\ \ 2)\ x \in \{0\},\ \ 3)\ x \in -N.$$

Это означает, что подмножество N, $\{0\}$,$-N$ из Z образуют разбиение множества Z. Теорема доказана.

Из равенства (6.15) мы получили обычную запись множества целых чисел в виде $\{\ldots, -4, -3, -2, -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots\}$.

Лекция 7. Упорядоченность кольца целых чисел.

Рассмотрим отношение $>$ для целых чисел. Напомним, что отношение $>$ на множестве N определяется правилом

$$a > b \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in N \quad a = b + k. \tag{7.1}$$

Пусть мы таким же способом пытаемся ввести отношение $>$ для целых чисел. Тогда получим

$$a > b \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in Z \quad a = b + k. \tag{7.2}$$

Однако, множество Z является кольцом. Поэтому уравнение $a = b + x$ всегда разрешимо в Z. Тогда существует $k \in Z$, где $a = b + k$, что влечет $a > b$. Итак, действуя по старой схеме, мы получаем, что любое целое a больше любого целого b. Это не то отношении $>$, которое мы интуитивного представляем. Заметим, что нельзя добавить $k > 0$ в определение (7.2) для исправления ситуации, так как мы только приступили к введению отношения $>$ и выражение $k > 0$ еще не имеет смысла.

Нам нужен иной подход, для этого рассмотрим новые понятия.

Упорядоченные кольца. Отношения $>$ и его свойства. Пусть $(K, +, \cdot)$ — произвольное кольцо.

Определение 7.1 *Кольцо* $(K, +, \cdot)$ *называется упорядоченным кольцом, если множество* K *можно разбить на три подмножества*

$$K^+,\ \{0\},\ -K^+ = \{-x \mid x \in K^+\}$$

так, что для всех $x, y \in K^+$ *выполнено условие* $x + y, \quad xy \in K^+$.

Множество K^+ будем называть множеством положительных элементов. Слово «разбить» в данном определении означает, что подмножества $K^+,\ \{0\},\ -K^+$, образующие разбиение, обладают следующими свойствами:

1) каждое из подмножеств не пусто;

2) объединение подмножеств $K^+,\ \{0\},\ -K^+$ равно K;

3) пересечение каждых двух подмножеств из данных трех множеств $K^+,\ \{0\},\ -K^+$ равно пустому множеству.

В упорядоченном кольце следующим способом вводится отношение $>$

Определение 7.2 *Пусть* K *упорядоченное кольцо с множеством положительных элементов* K^+ *и* $x, y \in K$. *Тогда*

$$x > y \quad \Leftrightarrow \quad x - y \in K^+. \tag{7.3}$$

Заметим, что по этому определению $x > 0 \quad \Leftrightarrow \quad x \in K^+$. Этим объясняется название «множество положительных элементов» для множества K^+.

Пусть K — упорядоченное кольцо с множеством положительных элементов K^+. Справедливы следующие свойства отношения $>$ в кольце K.

Свойство 1. Пусть $x, y \in K$. Тогда выполняется одно и только одно из трех утверждений

$$x > y,\ x = y,\ y > x.$$

Доказательство. Рассмотрим элемент $x - y \in K$. Множества $K^+, \{0\}, -K^+$ образуют разбиение множества K. Поэтому для элемента $x - y$ выполняется одно и только одно из трех условий

$$x - y \in K^+,\ x - y \in \{0\},\ x - y \in K^+. \tag{7.4}$$

Запись $x - y \in K^+$ означает $x > y$, а запись $x - y \in \{0\}$ означает $x - y = 0$, т.е. $x = y$. То, что $x - y \in -K^+$ заменяем на $y - x \in K^+$, т.е. на $y > x$. Получаем выполнение одного и только одного из утверждений $x > y$, $x = y$, $y > x$.

Свойство 2 Отношение $>$ транзитивно

$$x > y \wedge y > z \Rightarrow x > z.$$

Доказательство. Дано $x > y$, т.е. $x - y \in K^+$. Из $y > z$ имеем $y - z \in K^+$. Тогда $(x - y) + (y - z) = x - z \in K^+$. Поэтому $x > z$.

Свойство 3. Справедлива равносильность

$$x > y \Leftrightarrow x + z > y + z.$$

Доказательство. Имеем $x + z > y + z \quad \Leftrightarrow \quad (x + z) - (y + z) \in K^+ \quad \Leftrightarrow \quad x - y \in K^+ \quad \Leftrightarrow \quad x > y.$

Свойство 4. Если $x > y$ и $z > 0$, то $xz > yz$. Если $x > y$ и $z < 0$, то $xz < yz$.

Доказательство. Пусть $x > y$ и $z > 0$. Проверим, что $xz > yz$. Так как $x > y$, то $x - y \in K^+$. Дано $z > 0$, т.е. $z \in K^+$. Из $x - y, z \in K^+$ имеем $(x - y)z \in K^+$. Тогда $xz - yz \in K^+$, т.е. $xz > yz$.

Второе свойство проверяется аналогично.

Свойство 5. Неравенства можно почленно складывать

$$x > y \quad \wedge \quad z > t \quad \Rightarrow \quad x + z > y + t.$$

Неравенства с положительными членами можно почленно умножать:

$$x, y, z, t > 0 \quad \wedge \quad x > y \quad \wedge \quad z > t \quad \Rightarrow \quad xz > yt.$$

Доказательство первого утверждения самостоятельно. Проверим второе утверждение. Домножив $x > y$ на положительный элемент z. По свойству 4) получим $xz > yz$. Домножив $z > t$ на y, получим $yz > yt$. С учетом транзитивности отношения $>$ имеем $xz > yt$.

Определим в упорядоченном кольце K новые отношения $<$, $\geqslant$, $\leqslant$ следующими правилами

$$x < y \quad \Leftrightarrow \quad y > x, \tag{7.5}$$

$$x \geqslant y \quad \Leftrightarrow \quad x > y \text{ или } x = y, \tag{7.6}$$

$$x \leqslant y \quad \Leftrightarrow \quad x < y \text{ или } x = y. \tag{7.7}$$

Для этих отношений можно доказать свойства, аналогичные вышеперечисленным свойствам. Например,

Свойство 6. $x \geqslant y \ \wedge \ y \geqslant z \quad \Rightarrow \quad x \geqslant z.$

Доказательство. Так как $x \geqslant y$, то $x > y$ или $x = y$. Аналогично, $y > z$ или $y = z$. Поэтому нужно рассмотреть четыре случая

1. $x > y$ и $y > z$,
2. $x > y$ и $y = z$,
3. $x = y$ и $y > z$,
4. $x = y$ и $y = z$.

Рассмотрим случай 1. Так как $x > y$ и $y > z$, то $x > z$ по свойствам отношения $>$. Из $x > z$ по определению отношения $\geqslant$ получаем $x \geqslant z$. Случаи 2)–3) доказываются аналогично.

Если кольцо K является кольцом с единицей или полем, то справедливы следующие дополнительные свойства.

Свойство 7. Пусть K — кольцом с единицей 1. Тогда $1 > 0$.

Доказательство. Предположим, что утверждение $1 > 0$ не выполнено. Тогда по свойству 1 выполнено 1) $1 = 0$ или 2) $0 > 1$. Если $1 = 0$, то для всякого $x \in K$ имеем $x \cdot 1 = x \cdot 0$, т.е. $x = 0$. Так как x — произвольный элемент из K, то кольцо K состоит только из одного элемента 0. Это противоречит определению упорядоченного кольца. Действительно, каждое из трех подмножеств K^+, $\{0\}$, $-K^+$ не пусто. Поэтому, в K по крайней мере 3 элемента.

Если $0 > 1$, то $0 - 1 = -1 \in K^+$. Имеем запись $1 = -x$, где $x = -1$, $x \in K^+$. Поэтому $1 \in -K^+ = \{-x \in K \mid x \in K^+\}$. С другой стороны $1 = (-1)(-1) \in K^+$. Получили одновременно $1 \in K^+$ и $1 \in -K^+$, противоречие с тем, что K^+ и $-K^+$ не пересекаются.

Свойство 8. Пусть кольцо K является полем, $x \in K$ и $x \neq 0$. Тогда

$$x > 0 \Leftrightarrow x^{-1} > 0.$$

Доказательство. Пусть $x > 0$. Установим, что $x^{-1} > 0$ методом от противного. Пусть $x^{-1} > 0$ не выполнено. По свойству 1 верно 1) $x^{-1} = 0$ или 2) $0 > x^{-1}$. Если $x^{-1} = 0$, то $xx^{-1} = 0$, т.е. $1 = 0$, что противоречит требованию $1 \neq 0$ в аксиомах поля. Если $0 > x^{-1}$, то умножив на $x > 0$, получим $0 > 1$, противоречие с предыдущим свойством.

Обратно, пусть $x^{-1} > 0$. Тогда $(x^{-1})^{-1} > 0$, т.е. $x > 0$.

Свойство 9. Пусть кольцо K является полем, $x, y \in K$ и $x, y > 0$. Тогда

$$x > y \Leftrightarrow x^{-1} < y^{-1}.$$

Доказательство. Пусть $x > y$. Так как $x > 0$, то по свойству 8 имеем $x^{-1} > 0$. Умножим неравенство $x > y$ на положительный элемент x^{-1}. По свойству 4 $x \cdot x^{-1} > y \cdot x^{-1}$, т.е. $1 > y \cdot x^{-1}$. Умножим это неравенство на элемент $y^{-1} > 0$. Получим $y^{-1} > x^{-1}$, т.е. $x^{-1} < y^{-1}$.

Обратно, пусть $x^{-1} < y^{-1}$. Тогда $(x^{-1})^{-1} > (y^{-1})^{-1}$, т.е. $x > y$.

Вернемся к рассмотрению кольца Z.

Теорема 7.1 *Кольцо Z является упорядоченным кольцом.*

Доказательство. По определению (7.1) упорядоченного кольца нужно разбить кольцо Z на три подмножества Z^+, $\{0\}$ и $-Z^+ = \{-x \mid x \in Z^+\}$ так, чтобы выполнялось условие $x, y \in Z^+ \Rightarrow x + y, xy \in Z^+$. В качестве Z^+ по теореме 6.9 можно взять множество $N' = \{k' \mid k \in N\}$. В теореме 6.9 утверждается, что множества N', $\{0\}$ и $-N'$ образуют разбиение множества Z. Кроме того, формулы $k' + l' = (k + l)'$ и $k'l' = (kl)'$ для всех $k, l \in N$, полученные в (6.11), показывают, что сумма и произведение элементов из N' также содержится в множестве N' что и нужно. Теорема доказана.

Напомним, что кольцо K не имеет делителей нуля, если из для всех $a, b \in K$ из того, что $ab = 0$ следует $a = 0$ или $b = 0$.

Теорема 7.2 *Упорядоченное кольцо не имеет делителей нуля.*

Доказательство. Предположим, что K — упорядоченное кольцо, $a, b \in K$ и $ab = 0$. Проверим, что $a = 0$ или $b = 0$. Если $a = 0$, то все доказано. В противном случае $a > 0$ или $a < 0$. Точно также $b > 0$ или $b < 0$. Получаем один из четырех случаев

$$\begin{aligned} &1)\ a > 0 \text{ и } b > 0, \\ &2)\ a > 0 \text{ и } b < 0, \\ &3)\ a < 0 \text{ и } b > 0, \\ &4)\ a < 0 \text{ и } b < 0. \end{aligned}$$

Пусть выполнен случай 1). По свойствам неравенств $ab > 0$. Это несовместимо с $ab = 0$. Остальные случаи исключаются аналогично. Теорема доказана.

Теорема 7.3 *Кольцо целых чисел является областью целостности.*

Доказательство. По определению (5.1) коммутативное кольцо с единицей $1 \neq 0$ называется областью целостности, если оно не имеет делителей нуля. То, что

Z — коммутативное кольцо с единицей установлено в теореме 6.5. По предыдущей теореме кольцо Z не имеет делителей нуля. Теорема доказана.

Лекция 8. Рациональные числа.

С точки зрения школьной математики рациональное число — это дробь вида $\dfrac{p}{q}$, где p и q — целые числа. Однако, попытка дать точное определение, что такое «дробь вида $\dfrac{p}{q}$» весьма затруднительна.

Как и в случае целых чисел наше построение теории рациональных чисел основано на некоторой алгебраической идее. Действительно, имеющееся у нас кольцо Z, является областью целостности. Исходя из интуитивных представлений о рациональных числах, мы считаем, что наши построения приведут к множеству Q, обладающему следующими свойствами: множество Q является полем относительно сложения $+$ и умножения $\cdot$ и поле Q содержит область целостности Z.

Тем самым у нас должна быть рассмотрена следующая алгебраическая задача.

Вложение области целостности в поле. Пусть K — область целостности. Требуется построить множество P, обладающее следующими свойствами:

1. множество P является полем относительно операций сложения $+$ и умно-

жения $\cdot$,

2. поле P содержит область целостности K,

3. ограничение сложения и умножения в поле P на множестве K совпадает со сложением $+$ и умножением $\cdot$, определенными в кольце K.

Нам нужно найти способ построения такого поля. Для этого предположим, что требуемое поле P уже построено. Пусть $a, b \in K$ и $b \neq 0$. Так как $K \subseteq P$, то $a, b \in P$. Рассмотрим уравнение $b \cdot x = a$ в поле P и его решение также обозначим буквой x. Пусть $c, d \in K$, $d \neq 0$ и $d \cdot y = c$, где $y \in K$.

Как и при рассмотрении целых чисел, получим правило для равенства $x = y$. Если $x = y$, то имеем $bx = a$ и $dx = c$. Умножим равенство $bx = a$ на $c = dx$. Получим $bcx = adx$ и $(bc - ad)x = 0$. Если $x \neq 0$, то учтем, что в области целостности K нет делителей нуля. Тогда $bc - ad = 0$ и

$$bc = ad. \tag{8.1}$$

Если $x = 0$, то из $b \cdot x = a$ и $d \cdot x = c$ получаем $a = 0$ и $c = 0$. Тогда $bc = ad$, поскольку это равенство превращается в равенство $0 = 0$.

Пусть теперь $bc = ad$. Проверим, что $x = y$. Умножив равенство $bx = a$ на $c = dy$, получим $bcx = ady$ и $bc(x - y) = 0$. Если $c \neq 0$, то $bc \neq 0$. Из $bc(x - y) = 0$ и отсутствия делителей нуля имеем $x - y = 0$, т.е. $x = y$. Если

$c = 0$, то $bc = ad$ и $d \neq 0$ влечет $a = 0$. Из $bx = a$ и $dy = c$ получим $x = 0$ и $y = 0$. Тогда $x = y$, что и нужно.

Итак, первый шаг в построении поля P ясен. Нужно рассмотреть множество пар (a, b), где $a, b \in K$, и ввести отношение $\sim$, правилом $(a, b) \sim (c, d) \quad \Leftrightarrow \quad ad = bc$.

Построение поля Q. Поскольку нам требуется построить поле Q, то ограничимся далее случаем $K = Z$. Вместе с тем можно рассмотреть и общий случай, когда K — произвольная область целостности.

Итак, далее считаем, что

$$M = \{(a, b) \mid a, b \in Z \text{ и } b \neq 0\}. \tag{8.2}$$

Введем на M отношение $\sim$ правилом

$$(a, b) \sim (c, d) \quad \Leftrightarrow \quad ad = bc. \tag{8.3}$$

Теорема 8.1 *Отношение $\sim$ является отношением эквивалентности.*

Доказательство. Рефлексивность. Условие $(a, b) \sim (a, b)$ по правилу (8.3) означает $ab = ba$. Это верно, так как умножение в кольце Z коммутативно.

Симметричность. Пусть $(a,b) \sim (c,d)$, т.е. $ad = bc$. Требуется доказать, что $(c,d) \sim (a,b)$, т.е. $cb = da$. Это очевидно с учетом коммутативности умножения в кольце Z .

Транзитивность. Пусть $(a,b) \sim (c,d)$, т.е. $ad = bc$ и $(c,d) \sim (k,l)$, т.е. $cl = dk$. Требуется доказать, что $(a,b) \sim (k,l)$, т.е. $al = bk$.

Перемножим два данных равенства $ad = bc$ и $cl = dk$. Получим $adcl = bcdk$, $(al)(cd) = (bk)(cd)$ и $(al - bk)(cd) = 0$.

В кольце Z нет делителей нуля. Поэтому при $cd \neq 0$ получаем $al - bk = 0$ и $al = bk$. Рассмотрим случай $cd = 0$. Имеем $d \neq 0$, т.к. d – вторая компонента пары (c,d). Из $cd = 0$ и $d \neq 0$ следует $c = 0$. Тогда из $ad = bc$ и $cl = dk$ получаем $ad = 0$ и $dk = 0$. Отсюда $a = 0$ и $k = 0$. Тогда равенство $al = bk$ верно, т.к. имеет вид $0 = 0$. Теорема доказана.

Так как $\sim$ является отношением эквивалентности, то можно рассмотреть классы эквивалентных элементов для отношения $\sim$. Классы эквивалентных элементов для отношения $\sim$ назовем рациональными числами. Множество рациональных чисел обозначим через Q.

Следующий шаг в построении поля Q — введение сложения и умножения рациональных чисел, т.е.классов эквивалентных элементов для отношения $\sim$.

Для этого введем вначале сложение и умножение пар из множества M

$$(a, b) + (c, d) = (ad + bc, bd) \tag{8.4}$$

и

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac, bd). \tag{8.5}$$

Эти правила возникают из следующего замечания. Рассмотрим равенства $bx = a$ и $dy = c$. Тогда $(bd)(xy) = ac$. Умножим равенство $bx = a$ на d, а равенство $dy = c$ на b. Складывая, получим $(bd)(x + y) = ad + bc$.

Ясно, что сложение (8.4) и умножение (8.5) являются алгебраическими операциями на множестве M. Получили алгебру $(M, +, \cdot)$.

Теорема 8.2 *Сложение $+$ и умножение $\cdot$ в алгебре $(M, +, \cdot)$ ассоциативны и коммутативны.*

Доказательство коммутативности. Имеем $(a, b) + (c, d) = (ad + bc, bd)$, $(c, d) + (a, b) = (cb + da, db)$. Очевидно, что полученные пары совпадают.

Справедливость остальных свойств доказать самостоятельно.

Теорема 8.3 *Отношение $\sim$ является отношением конгруэнтности на алгебре $(M, +, \cdot)$.*

Доказательство. С учетом коммутативности сложения и умножения на алгебре M достаточно проверить только два условия

$$(a,b) \sim (c,d) \ \Rightarrow\ (a,b)+(k,l) \sim (c,d)+(k,l), \tag{8.6}$$

$$(a,b) \sim (c,d) \ \Rightarrow\ (a,b)\cdot(k,l) \sim (c,d)\cdot(k,l) \tag{8.7}$$

(иначе нужно еще два равенства, где пара (k,l) должна стоять слева). Так как $(a,b) \sim (c,d)$, то $ad = bc$.

Проверим, что $(a,b)+(k,l) \sim (c,d)+(k,l)$, т.е. $(al+bk, bl) \sim (cl+dk, dl)$. Тем самым нужно установить равенство $(al+bk)dl = bl(cl+dk)$, т.е. равенство $adl^2 + bdkl = bcl^2 + bdkl$. Для этого умножим равенство $ad = cb$ на l^2 и затем прибавим $bdkl$ к обеим частям.

Проверим, что $(a,b)\cdot(k,l) \sim (c,d)\cdot(k,l)$, т.е. $(ak, bl) \sim (ck, dl)$. Это означает $(ak)(dl) = (bl)(ck)$, т.е. $(ad)(kl) = (bc)(kl)$. Чтобы получить это равенство, умножим равенство $ad = bc$ на kl. Теорема доказана.

Итак, мы имеем алгебру $(M, +, \cdot)$ с отношением конгруэнтности $\sim$. Поэтому можно ввести операции $+$ и $\cdot$ на классах. Напомним, что классы эквивалентных элементов — это рациональные числа, а множество всех рациональных чисел обозначено через Q. Тем самым определено следующее сложение и умножение на множестве рациональных чисел Q: если даны два класса

$x, y \in Q$ и $(a, b) \in x$, $(c, d) \in y$, то

$$x + y - \text{класс, содержащий пару } (ad + bc, bd), \tag{8.8}$$

$$xy - \text{класс, содержащий пару } (ac, bd). \tag{8.9}$$

Так как сложение и умножение пар коммутативно и ассоциативно, то коммутативно и ассоциативно сложение и умножение рациональных чисел.

Введем обозначение, которое позволяет перейти к обычному виду рациональных чисел. Класс, содержащий пару $(a, b) \in M$, будем обозначать через $\frac{a}{b}$. Тогда получаем следующую запись множества рациональных чисел

$$Q = \{\frac{a}{b} \mid a, b \in Z \text{ и } b \neq 0\}. \tag{8.10}$$

Два класса $\frac{a}{b}$ и $\frac{c}{d}$ равны тогда и только тогда, когда пары (a, b) и (c, d) из этих классов эквивалентны: $(a, b) \sim (c, d)$, т.е. $ad = bc$. Получили правило равенства классов

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc. \tag{8.11}$$

Полученная запись рациональных чисел (8.10) и правило равенства (8.11) соответствуют обычному представлению о рациональных числах. Рассмотрим сложение и умножение рациональных чисел в записи (8.10). Вместо равенств

(8.8) и (8.9) получим равенства

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}. \tag{8.12}$$

Аналогично получаем правило умножения классов

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}. \tag{8.13}$$

Это обычные правила для сложение и умножение рациональных чисел.

ТЕОРЕМА 8.4 *Множество рациональных чисел образует поле относительно операций сложения и умножения.*

Доказательство. Нужно проверить следующие аксиомы поля.

1. $(x + y) + z = x + (y + z)$
2. $\exists 0 \in Q \quad \forall x \in Q \quad x + 0 = 0 + x = x$
3. $\forall x \in Q \quad \exists -x \in Q \quad x + (-x) = (-x) + x = 0$
4. $x + y = y + x$
5. $(x + y)z = xz + yz, \quad x(y + z) = xy + xz$
6. $(xy)z = x(yz)$
7. $\exists 1 \neq 0 \quad \forall x \in Q \quad x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$
8. $\forall x \in Q, x \neq 0 \quad \exists x^{-1} \in Q \quad x^{-1} \cdot x = x \cdot x^{-1} = 1$

9. $xy = yx$

Выполнение аксиом 1, 4, 6, 9, утверждающих о коммутативности и ассоциативности сложениея и умножения, отмечено выше.

Проверим аксиому 2. Обозначим через 0, класс, содержащий пару $(0, 1)$. Поэтому

$$0 = \frac{0}{1}.$$

Опишем пары класса 0. Имеем $(a, b) \in 0 \Leftrightarrow (a, b) \sim (0, 1) \Leftrightarrow a \cdot 1 = b \cdot 0 \Leftrightarrow a = 0$. Поэтому

$$0 = \{(0, c) \mid c \neq 0\}. \tag{8.14}$$

Проверим равенство $x + 0 = x$ для все $x \in Q$. Имеем $x = \dfrac{a}{b}$ для некоторых элементов $a, b \in Z$, где $b \neq 0$. По правилу сложения (8.12) имеем $x + 0 = \dfrac{a}{b} + \dfrac{0}{1} = \dfrac{a1 + b0}{b1} = \dfrac{a}{b} = x$, что и нужно.

Установим аксиому 3. Если $x = \dfrac{a}{b}$, то $-x = \dfrac{-a}{b}$. Действительно, $x + -x = \dfrac{a}{b} + \dfrac{-a}{b} = \dfrac{0}{b^2}$. Так как $(0, b^2) \in 0$, то $x + -x = 0$.

Проверим аксиому 5, где достаточно проверить только первое равенство.

Имеем

$$x = \frac{a}{b},\ y = \frac{c}{d},\ z = \frac{k}{l},\ \text{где}\ \ b, d, l \neq 0.$$

По правилам (8.12) и (8.13) получаем

$$x + y = \frac{ad + bc}{bd} \quad \text{и} \quad (x + y)z = \frac{(ad + bc)k}{bdl}.$$

Далее

$$xz + yz = \frac{ak}{bl} + \frac{ck}{dl} = \frac{(akdl + blck)}{bldl}.$$

По (8.11) имеем равенство $\frac{al}{bl} = \frac{a}{b}$ для всех $l \neq 0$. Применим это правило к полученным выше записям для $(x+y)z$ и $xz+yz$. Получим $(x+y)z = xz+yz$, что и нужно.

Для проверки аксиомы 7 рассмотрим класс $1 = \frac{1}{1}$. Имеем $(a, b) \in 1 \Leftrightarrow (a, b) \sim (1, 1) \Leftrightarrow a = b$. Поэтому

$$1 = \{(c, c) \mid c \in Z \text{ и } c \neq 0\}. \tag{8.15}$$

Пусть $x = \frac{a}{b}$. Тогда $x \cdot 1 = \frac{a}{b}\frac{1}{1} = \frac{a}{b} = x$, что и надо.

Осталось проверить аксиому 8. Пусть $x = \dfrac{a}{b} \neq 0$. Учитывая вид (8.14) элементов из 0, получаем $a \neq 0$. Так как $a \neq 0$, то можно рассмотреть класс $\dfrac{b}{a} \in Q$, который обозначим через x^{-1}. Тогда $xx^{-1} = \dfrac{a}{b}\dfrac{b}{a} = \dfrac{ba}{ab} = \dfrac{1}{1}$ по (8.15). G Получили $xx^{-1} = 1$. Теорема доказана.

В аксиомах поля присутствуют основные свойства чисел, например дистрибутивный закон. Поэтому мы доказали эти основные свойства для рациональных чисел.

При построении кольца целых чисел мы обнаружили в Z копию натуральных чисел. Поступим точно так же в случае поля Q. Вначале заметим, что во множестве Q нет целых чисел, например числа 3. Число 3 нельзя приравнять ни к паре, ни к классу. Но все же ясно, что поле Q должно содержать кольцо, изоморфное кольцу Z.

Рассмотрим произвольный класс $\dfrac{a}{1}$ и обозначим его через a'. Пусть

$$Z' = \{a' \mid a \in Z\}.$$

Теорема 8.5 *Множество Z' является подкольцом в поле Q, изоморфным кольцу Z.*

Доказательство. Очевидны равенства

$$a' + b' = (a + b)', \tag{8.16}$$

$$a'b' = (ab)'. \tag{8.17}$$

Поэтому множество Z' замкнуто относительно сложения и умножения. Покажем, что алгебра $(Z', +, \cdot)$ является кольцом, изоморфным кольцу Z

Рассмотрим отображение f алгебры $(Z, +, \cdot)$ в алгебру $(Z', +, \cdot)$, где

$$f(a) = a'.$$

Покажем, что f — изоморфизм алгебр $(Z, +, \cdot)$ и $(Z, +, \cdot)$. Тогда из того, что $(Z, +, \cdot)$ — кольцо автоматически получается, что и $(Z', +, \cdot)$ — кольцо. Нужно проверить, что f – биекция с условием изоморфизма

$$f(a + b) = f(a) + f(b) \text{ и } f(ab) = f(a)f(b) \text{ для всех } a, b \in Z. \tag{8.18}$$

Инъективность. Пусть $a, b \in Z$ и $a \neq b$. Если $f(a) = f(b)$, то $a' = b'$, $\dfrac{a}{1} = \dfrac{b}{1}$. Отсюда $(a, 1) \sim (b, 1)$ и $a = b$, противоречие.

Сюръективность очевидна. Поэтому f — биекция.

Осталось проверить равенства (8.18), т.е. равенства $(a + b)' = a' + b'$ и $(ab)' = a'b'$. Однако такие равенства уже установлены в (8.16) и (8.17). Теорема доказана.

Вследствие изоморфизма мы будем отождествлять целые число a из Z с классом $a' = \dfrac{a}{1} \in Q$. Поэтому целые числа составляют подмножество в множестве рациональных чисел.

Кроме того, каждое рациональное число представимо в виде дроби, где числитель и знаменатель являются целыми числами. Действительно, в произвольном поле P дробь $\dfrac{a}{b}$ — это элемент ab^{-1}. Пусть x — произвольное рациональное число, т.е. класс, содержащий некоторую пару (a, b), $a, b \in Z$, $b \neq 0$. Рассмотрим целые числа $a' = \dfrac{a}{1}$ и $b' = \dfrac{b}{1}$. Тогда $x = \dfrac{a}{1}\dfrac{1}{b} = a'(b')^{-1}$ — частное целых чисел a' и b'.

Отношение > для рациональных чисел.

Введем отношение $>$ для рациональных чисел и установим его свойства. Всякое поле является кольцом, поэтому понятие упорядоченного кольца можно применить и к полю.

Определение 8.1 *Поле P называется упорядоченным полем, если оно является упорядоченным в смысле кольца, т.е. P можно разбить на подмножества P^+, $\{0\}$, $-P^+ = \{-x \mid x \in P^+\}$ так, что*

$$x, y \in P^+ \quad \Rightarrow \quad x + y,\ xy \in P^+.$$

Пусть x — произвольное рациональное число. Тогда x — класс, содержащий некоторую пару (a, b), где $a, b \in Z$ и $b \neq 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8.2 *Пусть дана* (a, b)*, где* $a, b \in Z$ *и* $b \neq 0$.
Пара (a, b) *называется положительной парой, если* $ab > 0$*;*
Пара (a, b) *называется нулевой парой, если* $ab = 0$*;*
Пара (a, b) *называется отрицательной парой, если* $ab < 0$.

Известно, что для целого числа $ab \in Z$ верно одно и только одно из утверждений: 1) $ab > 0$, 2) $ab = 0$, 3) $ab < 0$. Поэтому для произвольной пары (a, b), где $a, b \in Z$, выполнено одно и только одно из трех утверждений: 1) пара (a, b) положительна, 2) пара (a, b) нулевая, 3) пара (a, b) отрицательна.

ТЕОРЕМА 8.6 *Пусть пара* (a, b) *эквивалентна паре* (c, d). *Тогда выполнены следующие утверждения.*
Если пара (a, b) *положительна, то пара* (c, d) *положительна;*
если пара (a, b) *нулевая, то пара* (c, d) *нулевая;*
если пара (a, b) *отрицательна, то пара* (c, d) *отрицательна.*

Доказательство. Так как пара (a, b) эквивалентна паре (c, d), то $ad = bc$. Умножив это равенство на bd, получим $abd^2 = cdb^2$. Отсюда $ab > 0 \Leftrightarrow cd > 0$, а также $ab = 0 \Leftrightarrow cd = 0$, $ab < 0 \Leftrightarrow cd < 0$, что и нужно. Теорема доказана.

Из этой теоремы получаем, что для любого класса $x \in Q$ выполнено одно и только одно из следующих утверждений: 1) все пары класса x положительны,

2) все пары класса x нулевые, 3) все пары класса x отрицательны.

Отметим, что существует только один класс типа 2) — это рациональное число 0. Назовем класс x положительным классом, если все пары класса x положительны. Назовем класс x отрицательным классом, если все пары класса x отрицательны. Из этого определения получаем, что для любого любого класса $x \in Q$ выполнено одно и только одно из утверждений: 1) класс x является положительным классом, 2) класс x — нулевой класс, т.е. $x = 0$, 3) класс x является отрицательным классом.

Теорема 8.7 *Поле Q является упорядоченным полем.*

Доказательство. Необходимо разбить множество Q на три подмножества $Q^+, \{0\}, -Q^+ = \{-x \mid x \in Q^+\}$ так, чтобы выполнялось условие $x, y \in Q^+ \Rightarrow x+y, xy \in Q^+$ В качестве Q^+ возьмем множество положительных классов.

Покажем, что $-Q^+ = \{-x \mid x \in Q^+\}$ совпадает с множеством отрицательных классов. Обозначим через A множество отрицательных классов. Равенство $-Q^+ = A$ проверим в два шага: 1) $-Q^+ \subseteq A$ и 2) $A \subseteq -Q^+$. Проверим 1), пусть $y \in -Q^+$, т.е. $y = -x$, где $x \in Q^+$. Поскольку $x \in Q^+$, то $x = \dfrac{a}{b}$, где $ab > 0$. Тогда $-x = \dfrac{-a}{b}$, где $(-a)b < 0$. Поэтому $-x$ — отрицательный класс.

Проверим 2), пусть $y \in A$, т.е. y — отрицательный класс, $y = \dfrac{a}{b}$, где $ab < 0$. При этом $y = -x$, где $x = -y$. Имеем $x = \dfrac{-a}{b}$, $(-a)b > 0$, т.е. x — положительный класс, $x \in Q^+$. Из $y = -x$ получаем $y \in -Q^+$.

Итак, $-Q^+ = A$. Ранее проверено, что для любого класса $x \in Q$ выполнено одно и только одно из утверждений: 1) x — положительный класс, 2) $x = 0$, 3) x — отрицательный класс. Это означает, что любой элемент $x \in Q$ содержится в одном и только одном из множеств Q^+, $\{0\}$, $-Q^+$. Поэтому подмножества Q^+, $\{0\}$, $-Q^+$ из множества Q образуют разбиение множества Q.

Пусть $x, y \in Q^+$. Тогда $x = \dfrac{a}{b}$, где $ab > 0$, $y = \dfrac{c}{d}$, где $cd > 0$.

Так как $ab > 0$, то или 1) $a > 0$ и $b > 0$ или 2) $a < 0$ и $b < 0$. В случае 2) сменим пару $(a, b) \in x$ на пару $(-a, -b) \in x$. Аналогично рассуждаем для y. Поэтому $x = \dfrac{a}{b}$, $y = \dfrac{c}{d}$, где $a, b, c, d > 0$. Имеем $x + y = \dfrac{ad + bc}{bd}$ и $xy = \dfrac{ac}{bd}$, где пары $(ad + bc, bd)$ и (ac, bd) положительны. Поэтому $x + y, xy \in Q^+$, что и нужно. Теорема доказана.

Замечание. Пусть P — произвольное упорядоченное поле с единицей 1. Обозначим через n' элемент из P вида $\underbrace{1 + 1 + \ldots 1}_{n \text{ раз}}$.

Рассмотрим $N' = \{n' \mid n \in N\}$. Применяя те же рассуждения , что и в теореме (6.8), нетрудно показать, что $(N', +, \cdot)$ — алгебра, изоморфная алгебре $(N, +, \cdot)$. Отождествим алгебры $(N', +, \cdot)$ и $(N, +, \cdot)$. Получим вложение натуральных чисел в поле P.

Аналогично можно найти вложение в поле P целых и рациональных чисел.

Лекция 9. Фундаментальные последовательности в упорядоченных полях.

Необходимость расширения множества рациональных чисел была осознана древнегреческими математиками, открывшими несоизмеримые отрезки. Так, например, мы не сможем выразить длину диагонали квадрата со стороной 1, располагая только рациональными числами, поскольку эта длина равна $\sqrt{2}$ и не является рациональным числом.

Строгие теории действительных чисел были построены в конце 19 в. Г.Кантором (фундаментальные последовательности), Р.Дедекиндом (дедекиндовы сечения) и К.Вейерштрасом (бесконечные десятичные дроби).

Отметим вначале, что мы не сможем использовать конструкции, применявшиеся при построении кольца Z и поля Q. Действительно, мы использовали следующий метод. Используя предыдущее построенное числовое множество L, строится множество пар $M = \{(a,b) \mid a,b \in L\}$. Затем на множестве M вводится отношение эквивалентности $\sim$, и классы эквивалентности объявляются элементами новой числовой системы. Однако из курса математического анализа известно, что множество рациональных чисел, множество пар $M = \{(a,b) \mid a,b \in Q\}$ и множество классов для отношения эквивалентности $\sim$ являются счетными множествами. Множество действительных чисел R не является счетным множеством. Поэтому оно не может получиться как множество классов для отношения эквивалентности $\sim$.

Мы построим поле действительных чисел с помощью фундаментальных последовательностей. Сформулируем идею такого построения. Рассмотрим интуитивно представляемое действительное число α. Введем последовательность $\{a_n\}$, где a_1 —рациональное число, являющееся приближенным значением α с точностью до $\frac{1}{10}$, a_2 — приближение с точностью до $\frac{1}{10^2}$ и т.д. Сопоставим с данным числом α последовательность рациональных чисел $\{a_n\}$. Последовательность $\{a_n\}$ имеет предел, равный α, и удовлетворяет необходимому условию сходимости (фундаментальна)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n, m > N \quad |a_n - a_m| < \varepsilon. \tag{9.1}$$

Однако, это сопоставление неоднозначно, можно выбрать другую последовательность b_n где разность $\{a_n - b_n\}$ имеет предел, равный 0 (мы будем называть такую последовательность нулевой последовательностью). Действительное число будет определяться как класс фундаментальных последовательностей из рациональных чисел, отличающихся на нулевую последовательность. Приведем вначале некоторые предварительные понятия.

Абсолютная величина в упорядоченных полях

Пусть P – произвольное упорядоченное поле с множеством положительных элементов P^+. Напомним, что для $a, b \in P$ имеем

$$a > b \Leftrightarrow a - b \in P^+.$$

Пусть a — произвольный элемент поля P. Определим абсолютную величину (модуль) элемента a, которую обозначим через $\mid a \mid$. Считаем

$$\mid a \mid = \left\{ \begin{array}{rl} a, & \text{если } a \geqslant 0; \\ -a, & \text{если } a < 0. \end{array} \right. \tag{9.2}$$

Установим следующие свойства абсолютной величины.

Свойство 1

$$\mid a \mid = \mid -a \mid . \tag{9.3}$$

Доказательство. Если $a = 0$, то равенство верно, т.к. имеет вид $0 = 0$. Пусть $a > 0$. Тогда $\mid a \mid = a$. Так как $-a < 0$, то $\mid -a \mid = -(-a) = a$. Равенство (9.3) верно, т.к. имеет вид $a = a$. Пусть $a < 0$. Тогда $\mid a \mid = -a$, $-a > 0$ и $\mid -a \mid = -a$. Равенство (9.3) верно, т.к. имеет вид $-a = -a$.

Свойство 2

$$\mid ab \mid = \mid a \mid \mid b \mid . \tag{9.4}$$

Доказательство. Если $a = 0$ или $b = 0$, то равенство верно, т.к. имеет вид $0 = 0$. Пусть $a \neq 0$ и $b \neq 0$. Тогда возможны следующие четыре случая:

1) $a > 0,\ b > 0$ и равенство (9.4) имеет вид $ab = ab$.
2) $a < 0,\ b < 0$ и равенство (9.4) имеет вид $ab = (-a)(-b) = ab$.
3) $a < 0,\ b > 0$ и равенство (9.4) имеет вид $-(ab) = (-a)b$.
4) $a > 0,\ b < 0$ и равенство (9.4) имеет вид $-(ab) = a(-b)$.

Свойство 3

$$\mid a+b \mid \leqslant \mid a \mid + \mid b \mid . \tag{9.5}$$

Доказательство. Если $a = 0$, то неравенство (9.4) имеет вид $\mid b \mid \leqslant \mid b \mid$, если $b = 0$, — то вид $\mid a \mid \leqslant \mid a \mid$ и, поэтому, верно.

Если $a > 0$ и $b > 0$, то равенство (9.4) верно, т.к. имеет вид $a + b \leqslant a + b$. При $a < 0$ и $b < 0$ неравенство также выполнено, т.к. имеет вид $-(a + b) \leqslant (-a) + (-b)$. Остался случай, когда один из элементов a, b положительный, а другой отрицательный. Можно считать, что $a > 0$ и $b < 0$.

Для записи абсолютной величины $\mid a + b \mid$ рассмотрим следующие случаи: а) $a + b > 0$, б) $a + b = 0$, в) $a + b < 0$. В случае а) неравенство (9.4) имеет вид $a + b \leqslant a - b$, т.е. вид $b \leqslant -b$, $2b \leqslant 0$, что верно.

В случае б) вместо (9.4) получаем $0 \leqslant 2a$, верное неравенство.

В случае в) неравенство (9.4) имеет вид $-(a + b) \leqslant a - b$, т.е. вид $-a \leqslant a$, $0 \leqslant 2a$, что верно. Теорема доказана.

Фундаментальные последовательности в упорядоченных полях Следующие три определения являются основными при построении поля действительных чисел.

Пусть P упорядоченное поле и $\{a_n\}$ последовательность элементов поля P.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.1 *Последовательность $\{a_n\}$ называется фундаментальной последовательностью, если*

$$\forall \varepsilon \in P\ \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n, m > N \quad | a_n - a_m | < \varepsilon. \tag{9.6}$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.2 *Элемент $a \in P$ называется пределом последовательности $\{a_n\}$, если*

$$\forall \varepsilon \in P\ \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N\ | a_n - a | < \varepsilon. \tag{9.7}$$

То, что элемент $a \in P$ являются пределом последовательности $\{a_n\}$, записываем в виде $\lim a_n = a$.

Заметим, что вместо $| a_n - a | < \varepsilon$ в определении предела последовательности мы можно записывать $| a_n - a | \leqslant \varepsilon$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9.3 *Последовательность $\{a_n\}$ называется нулевой последовательностью, если она имеет предел, равный нулю, т.е.*

$$\forall \varepsilon \in P\ \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N\ | a_n | < \varepsilon. \tag{9.8}$$

Следующие свойства, относящиеся к введенным выше понятиям, будут постоянно использоваться при построении поля действительных чисел.

Свойства фундаментальных и нулевых последовательностей.

Свойство 1. Если последовательность $\{a_n\}$ имеет предел $a \in P$, а последовательность $\{b_n\}$ имеет предел $b \in P$, то последовательности $\{a_n + b_n\}$, $\{a_n - b_n\}$ $\{a_n b_n\}$ имеют соответственно пределы $a + b, a - b, ab \in P$.

Доказательство. Считаем, что все рассматриваемые элементы содержится в поле P и, поэтому опускаем записи вида $\varepsilon \in P$, $a \in P$ и т.п. Кроме того, без особого упоминания применяем простейшие свойства упорядоченный полей типа

$$1 > 0, \;\; 2 \neq 0, \;\; \frac{1}{2} > 0,$$
$$a > 0 \;\Leftrightarrow\; a^{-1} > 0 \quad \text{при} \quad a \neq 0.$$

Установим вначале, что $\lim(a_n + b_n) = a + b$, т.е.

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \mid (a_n + b_n) - (a + b) \mid < \varepsilon. \tag{9.9}$$

Пусть $\varepsilon > 0$. Поскольку $\lim a_n = a$, то для $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ существует номер N_1 с условием $\forall n > N_1 \mid a_n - a \mid < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Из $\lim b_n = b$ следует, что существует номер N_2 с условием $\forall n > N_2 \mid b_n - b \mid < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Пусть $N = \max(N_1, N_2)$. Для всех $n > N$

имеем

$$| (a_n + b_n) - (a + b) | \leqslant | a_n - a) | + | b_n - b | < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Поэтому $\lim(a_n + b_n) = a + b$. Остальные утверждения проверяются аналогично.

Свойство 2. Последовательность $\{a_n\}$ элементов поля P имеющая предел $a \in P$, является фундаментальной последовательностью.

Доказательство. Пусть $\varepsilon > 0$. Необходимо найти номер N такой, что для всех $n, m > N$ выполнено неравенство

$$| a_n - a_m | < \varepsilon. \tag{9.10}$$

Имеем $\lim a_n = a$. Тогда для $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ существует номер N_1 с условием: если $n > N_1$, то $| a_n - a | < \frac{\varepsilon}{2}$.

Для $m > N_1$ также имеем $| a_m - a | < \frac{\varepsilon}{2}$, и с учетом $| x | = | -x |$ получаем $| a - a_m | < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда, учитывая, что $| x + y | \leqslant | x | + | y |$, получим

$$| a_n - a_m | = | (a_n - a) + (a - a_m) | \leqslant | (a_n - a) | + | (a - a_m) | < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

для всех $n, m > N_1$. Поэтому в качестве искомого номера N можно взять номер N_1.

Свойство 3. Сумма, разность и произведение фундаментальных последовательностей также являются фундаментальными последовательностями.

Доказательство. Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — фундаментальные последовательности. Проверим, что $\{a_n + b_n\}$ — фундаментальная последовательность. Пусть $\varepsilon > 0$. Найдем номер N с условием $|(a_n + b_n) - (a_m + b_m)| < \varepsilon$, т.е. с условием $|(a_n - a_m) + (b_n - b_m)| < \varepsilon$ для всех $n, m > N$.

Из фундаментальности $\{a_n\}$ для $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ найдем номер N_1 такой, что $|a_n - a_m| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ для всех $n, m > N_1$.

Из фундаментальности $\{b_n\}$ найдем номер N_2 такой, что $|b_n - b_m| < \dfrac{\varepsilon}{2}$ для всех $n, m > N_2$. Пусть $N = \max(N_1, N_2)$. Для всех $n, m > N$ выполнено неравенство $|(a_n - a_m) + (b_n - b_m)| < \dfrac{\varepsilon}{2} + \dfrac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, что и нужно.

Свойство 4. Пусть последовательность $\{a_n\}$ фундаментальна и $k \in P$. Тогда последовательность $\{ka_n\}$, являющаяся произведением элемента k на последовательность $\{a_n\}$, также является фундаментальной последовательностью. Доказательство. При $k = 0$ утверждение очевидно выполнено. Пусть $k \neq 0$. Для $\varepsilon > 0$ найдем N с условием $|ka_n - ka_m| < \varepsilon$ для всех

$n, m > N$. Имеем

$$| ka_n - ka_m |=| k || a_n - a_m |< \varepsilon \Leftrightarrow | a_n - a_m |< \varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{k}.$$

Тогда искомый номер — это номер N для фундаментальной последовательности $\{a_n\}$ такой, что $| a_n - a_m |< \varepsilon_1$ для всех $n, m > N$.

Свойство 5. Всякая фундаментальная последовательность являются ограниченной.

Доказательство. Напомним, что последовательность $\{a_n\}$ ограничена, если существует $k \in P$ с условием $| a_n |< k$ для всех n. Вместо слов «для всех n» можно поставить «для всех n, начиная с некоторого номера». Действительно, если для всех n, начиная с некоторого номера N имеем $| a_n |< k$, то заменим k на $k_1 = \max(| a_1 |, \dots, | a_{N-1} |, k) + 1$. Тогда $| a_n |< k_1$ для всех n.

Пусть $\varepsilon = 1$ в определении фундаментальной последовательности. Тогда для $n > N$ и $m = N + 1$ имеем $| a_n - a_{N+1} |< 1$. Отсюда $-1 < a_n - a_{N+1} < 1$ и $-1 + a_{N+1} < a_n < 1 + a_{N+1}$ для $n > N$. Существовует k, где $-k < -1 + a_{N+1}$ и $1 + a_{N+1} < k$. Тогда для $n > N$ имеем $-k < a_n < k$, т.е. $| a_n |< k$. Поэтому последовательность $\{a_n\}$ ограничена.

Свойство 6. Сумма, разность и произведение нулевых последовательностей также являются нулевыми последовательностями.

Доказательство. Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — нулевые последовательности, т.е. имеют предел равный 0. Тогда сумма, разность и произведение этих последовательностей имеют соответственно пределы равные $0 + 0 = 0$, $0 - 0 = 0$ и $0 \cdot 0 = 0$. и, следовательно, также являются нулевыми последовательностями.

Свойство 7. Произведение нулевой последовательности на ограниченную последовательность являются нулевой последовательностью.

Доказательство. Пусть $\{a_n\}$— нулевая последовательность, $\{b_n\}$ — ограниченная последовательность.

Для $\varepsilon > 0$ нужно найти номер Nс условием $\mid a_n b_n \mid < \varepsilon$ для всех $n > N$. Так как последовательность $\{b_n\}$ — ограничена, то $\mid b_n \mid < k$ для некоторого $k > 0$. Тогда $\mid a_n b_n \mid = \mid a_n \mid k < \varepsilon \Leftrightarrow \mid a_n \mid < \varepsilon_1$ для $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{k} > 0$.

Так как $\{a_n\}$— нулевая последовательность, то по $\varepsilon_1 > 0$ найдется N с условием $\mid a_n \mid < \varepsilon_1$ для всех $n > N$, что и нужно.

Лекция 10. Построение поля действительных чисел.

Приступим к построению поля R. Пусть M — множество фундаментальных последовательностей рациональных чисел. Поэтому

$$M = \{\{a_n\} \mid a_n \in Q \text{ и последовательность}\{a_n\} \text{ фундаментальна}\}. \tag{10.1}$$

Обозначим множество нулевых последовательностей рациональных чисел через M_0. Получим

$$M_0 = \{a_n\} \mid a_n \in Q \text{ и } \lim a_n = 0\}. \tag{10.2}$$

Поскольку всякая нулевая последовательность являются фундаментальной, то $M_0 \subseteq M$.

Введем отношение $\sim$ на множестве M. Пусть $\{a_n\}, \{b_n\} \in M$. Считаем, что $\{a_n\} \sim \{b_n\}$, если разность $\{a_n\} - \{b_n\}$ являются нулевой последовательностью. Обозначим $\{c_n\} = \{a_n\} - \{b_n\}$. Тогда $\{a_n\} = \{b_n\} + \{c_n\}$, где $\{c_n\}$ является нулевой последовательностью. Поэтому определение отношения $\sim$ можно записать в одном из видов

$$\{a_n\} \sim \{b_n\} \Leftrightarrow \{a_n\} - \{b_n\} \in M_0; \tag{10.3}$$

$$\{a_n\} \sim \{b_n\} \Leftrightarrow \exists \{c_n\} \in M_0 \mid \{a_n\} = \{b_n\} + \{c_n\}. \tag{10.4}$$

Теорема 10.1 *Отношение $\sim$ является отношением эквивалентности на множестве M.*

Доказательство. Рефлексивность отношения $\sim$ очевидна, т.к. разность $\{a_n\} - \{a_n\}$ постоянная последовательность, все члены которой равны 0. Она имеет предел равный 0 и, поэтому, является нулевой последовательностью.

Симметричность. Пусть $\{a_n\} \sim \{b_n\}$. Тогда $\{a_n\} - \{b_n\}$ — нулевая последовательность. Последовательность $(-1)(\{a_n\} - \{b_n\}) = \{b_n\} - \{a_n\}$ имеет предел, равный $(-1)0 = 0$. Поэтому $\{b_n\} \sim \{a_n\}$, что и нужно.

Транзитивность. Пусть $\{a_n\} \sim \{b_n\}$ и $\{b_n\} \sim \{c_n\}$. Тогда последовательности $\{a_n\} - \{b_n\}$ и $\{b_n\} - \{c_n\}$ являются нулевыми последовательностями. Их сумма $(\{a_n\} - \{b_n\}) + (\{b_n\} - \{c_n\}) = \{a_n\} - \{c_n\}$ по свойству 6 является нулевой последовательностью. Поэтому $\{a_n\} \sim \{c_n\}$, что и нужно. Теорема доказана.

Поскольку $\sim$ является отношением эквивалентности на M, то можно рассматривать классы эквивалентных элементов.

Определение 10.1 *Действительным числом называется класс эквивалентных элементов для отношения $\sim$.*

Множество всех действительных чисел обозначим буквой R. Действительные числа будем обозначать греческими буквами $\alpha, \beta, \ldots$. Введем на множестве R

операции сложения и умножения. Для этого вначале обычным способом введем сложение и умножение последовательностей из M

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\}, \tag{10.5}$$

$$\{a_n\} \cdot \{b_n\} = \{a_n \cdot b_n\}. \tag{10.6}$$

По свойству 2 $\{a_n\}+\{b_n\}$ и $\{a_n\}\cdot\{b_n\}$ — фундаментальные последовательности с рациональными коэффициентами, т.е. $\{a_n\}+\{b_n\}, \{a_n\}\cdot\{b_n\} \in M$. Поэтому $+$ и $\cdot$ — алгебраические операции на множестве M. Получили алгебру $(M, +, \cdot)$, на которой определено также отношение эквивалентности $\sim$. Очевидно, что сложение и умножение в алгебре $(M, +, \cdot)$ коммутативно и ассоциативно.

Теорема 10.2 *Отношение $\sim$ является отношением конгруэнтности на алгебре $(M, +, \cdot)$.*

Доказательство. С учетом коммутативности операций $+$ и $\cdot$ достаточно проверить, что

$$\forall x, y, z \in M \quad x \sim y \quad \Rightarrow \quad x + z \sim y + z, \quad xz \sim yz. \tag{10.7}$$

Доказательство. Дано, что $x \sim y$, т.е. $x - y$ — нулевая последовательность. Условие $x + z \sim y + z$ означает, что $(x + z) - (y + z)$ — нулевая последовательность, т.е. означает условие $x - y$ — нулевая последовательность, а это дано.

Покажем, что $xz \sim yz$. Обозначим $x = \{a_n\}$, $y = \{b_n\}$, $z = \{c_n\}$. Имеем $\{a_n\} = \{b_n\} + \{d_n\}$, где $\{d_n\}$ — нулевая последовательность. Тогда $\{a_n c_n\} = \{b_n c_n\} + \{d_n c_n\}$

Последовательность $\{c_n\}$ фундаментальна, и, поэтому, ограничена (свойство 5). Произведение $\{d_n c_n\}$ нулевой последовательности $\{d_n\}$ и ограниченной последовательности $\{c_n\}$ являются нулевой последовательностью (свойство 6). Поэтому $\{a_n c_n\} \sim \{b_n c_n\}$, т.е. $xz \sim yz$, что и нужно. Теорема доказана.

Так как $\sim$ – отношение конгруэнтности на алгебре $(M, +, \cdot)$, то можно ввести сложение и умножение классов эквивалентных элементов, т.е. действительных чисел. Если даны два класса α, β, причем $\{a_n\} \in \alpha$, $\{b_n\} \in \beta$, то $\{a_n\} + \{b_n\} \in \alpha + \beta$ и $\{a_n\}\{b_n\} \in \alpha\beta$. Получаем бинарные операции $+$ и $\cdot$ на множестве R и алгебру $(R, +, \cdot)$. Определение сложения и умножения действительных чисел. можно записать в следующем виде.

$$\begin{aligned}
&\text{Пусть } \alpha, \beta \in R, \text{ причем } \{a_n\} \in \alpha,\ \{b_n\} \in \beta. \quad \text{Тогда} \\
&\alpha + \beta - \text{класс, содержащий последовательность } \{a_n + b_n\}, \\
&\alpha\beta - \text{класс, содержащий последовательность } \{a_n b_n\}.
\end{aligned}$$

Поскольку сложение и умножение элементов из M коммутативно и ассоциативно, то сложение и умножение действительных чисел коммутативно и ассоциативно.

Теорема 10.3 *Множество действительных чисел является полем относительно операций сложения и умножения.*

Доказательство. Нужно проверить следующие аксиомы поля.

1. $(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$
2. $\exists 0 \in R \quad \forall \alpha \in R \quad \alpha+0=0+\alpha=\alpha$
3. $\forall \alpha \in R \quad \exists -\alpha \in R \quad \alpha+(-\alpha)=-\alpha+\alpha=0$
4. $\alpha+\beta=\beta+\alpha$
5. $(\alpha+\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma, \quad \alpha\cdot(\beta+\gamma)=\alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$
6. $(\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma=\alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$
7. $\exists 1 \neq 0 \quad \forall \alpha \in R \quad 1\cdot\alpha=\alpha\cdot 1=\alpha$
8. $\forall \alpha \neq 0 \quad \exists \alpha^{-1} \in R \quad \alpha\cdot\alpha^{-1}=\alpha^{-1}\cdot\alpha=1$
9. $\alpha\cdot\beta=\beta\cdot\alpha$

Выполнимость аксиом 1, 4, 6, 9 уже отмечалась.

Аксиома 2. Рассмотрим постоянную последовательность $\{a_n\}$, у которой все члены равны нулю, т.е. $\forall n \quad a_n=0$. Она, очевидно, фундаментальна. Обозначим через 0 класс содержащий последовательность$\{a_n\}$. Изучим элементы класса 0. Имеем $\{b_n\}\in 0 \Leftrightarrow \{b_n\}-\{a_n\}$ — нулевая последовательность. Однако $\{b_n\}-\{a_n\}=\{b_n\}$. Поэтому $\{b_n\}\in 0 \Leftrightarrow \{b_n\}$ — нулевая последовательность. Получили, что в класс 0 входят все нулевые последовательности и только они.

Пусть $\alpha \in R$. Класс α содержит некоторую подпоследовательность $\{b_n\}$. Класс $\alpha + 0$ содержит подпоследовательность $\{b_n\} + \{a_n\} = \{b_n\}$. Поэтому $\alpha + 0 = \alpha$.

Аксиома 3. Пусть $\alpha \in R$ и $\{b_n\} \in \alpha$. Последовательность $\{b_n\}$ фундаментальна и, поэтому, фундаментальна последовательность $\{-b_n\}$. Рассмотрим класс β, содержащий последовательность $\{-b_n\}$. В классе $\alpha + \beta$ содержится последовательность $\{b_n\} + \{-b_n\} = \{a_n\}$, где $a_n = 0$ для всех n. Поэтому $\alpha + \beta = 0$ и $\beta = -\alpha$.

Аксиома 5 проверяется аналогично аксиомам 1, 4, 6 и 9.

Аксиома 7. Рассмотрим постоянную последовательность $\{a_n\}$, у которой все члены равны 1. Эта последовательность постоянна и, поэтому, фундаментальна. Класс, содержащий последовательность $\{a_n\}$, обозначим через 1. Пусть $\alpha \in R$ и $\{b_n\} \in \alpha$. В классе $\alpha 1$ содержится последовательность $\{b_n\}\{a_n\} = \{b_n\}$. Поэтому $\alpha 1 = \alpha$, что и нужно.

Осталось проверить аксиому 8. Проверка этой аксиомы более сложна. Она требует дополнительных понятий и предложений.

Пусть $\{a_n\}$ — последовательность элементов упорядоченного поля P.

Определение 10.2 *Последовательность $\{a_n\}$ называется положи-*

тельной последовательностью, если

$$\exists k > 0\ k \in P \quad \exists N \quad \forall n > N \quad a_n > k. \tag{10.8}$$

Тем самым $\{a_n\}$ – положительная последовательность, если начиная с некоторого номера все ее члены больше фиксированного положительного числа $k \in P$.

Определение 10.3 *Последовательность $\{a_n\}$ называется отрицательной последовательностью, если последовательность $\{-a_n\}$ положительная. Тем самым*

$$\exists k > 0\ k \in P \quad \exists N \quad \forall n > N \quad a_n < -k. \tag{10.9}$$

Поэтому последовательность $\{a_n\}$ отрицательна, если все ее члены начиная с некоторого номера меньше некоторого фиксированного отрицательного числа.

Из этих определений получаем, например, что последовательность $\{a_n\}$, где $a_n = \dfrac{1}{n}$, не является ни положительной ни отрицательной последовательностью. Отметим, что вместо $a_n > k$ в определении положительной последовательности мы можем записывать $a_n \geqslant k$.

Теорема 10.4 *Для произвольной фундаментальной последовательности $\{a_n\}$ справедливо одно и только одно из трех утверждений :* 1) *последовательность $\{a_n\}$ положительна,* 2) *последовательность $\{a_n\}$ отрицательна,* 3) *последовательность $\{a_n\}$ нулевая.*

Доказательство. Проверим вначале, что никакие два утверждения из 1-3 несовместимы.

Пусть одновременно выполнены утверждения 1 и 2. Поскольку последовательность $\{a_n\}$ положительна, то

$$\exists k > 0 \quad \exists N_1 \quad \forall n > N_1 \quad a_n > k.$$

Так как $\{a_n\}$ отрицательна, то

$$\exists l > 0 \quad \exists N_2 \quad \forall n > N_2 \quad a_n < -l.$$

Пусть $N = \max(N_1, N_2)$. Возьмем $n > N$. Тогда одновременно $a_n > k$ и $a_n < -l$. Отсюда $k < -l$. Из $0 > -l$, $-l > k$, $k > 0$ имеем $0 > 0$, противоречие.

Пусть одновременно выполнены утверждения 1 и 3. Так как $\{a_n\}$ — положительная последовательность, то

$$\exists k > 0 \quad \exists N_1 \quad \forall n > N_1 \quad a_n > k.$$

Так как $\{a_n\}$ — нулевая последовательность, то для числа $\varepsilon = \dfrac{k}{2}$ имеем

$$\exists N_2 \quad \forall n > N_2 \quad | \, a_n \, | < \frac{k}{2} \, .$$

Пусть $N = \max(N_1, N_2)$, и $n > N$. Тогда имеем $k < a_n < \dfrac{k}{2}$. Отсюда $\dfrac{k}{2} > k$ и $\dfrac{k}{2} < 0$. Получили $k < 0$, противоречие.

Пусть выполнены условия 2 и 3, т.е. последовательность $\{a_n\}$ одновременно отрицательна и нулевая. Тогда последовательность $\{-a_n\}$ одновременно положительная и нулевая, что невозможно.

Единственность доказана. Покажем теперь, что для всякой фундаментальной последовательности $\{a_n\}$ выполняется хотя бы одно из трех условий. Для этого предложим, что $\{a_n\}$ — фундаментальная последовательность, для которой не выполняются ни условие 1, ни условие 2. Тем самым последовательность $\{a_n\}$ не является ни положительной последовательностью, ни отрицательной последовательностью. Проверим, что тогда выполнено условие 3, т.е. $\{a_n\}$ — нулевая последовательность.

Так как $\{a_n\}$ не является положительной последовательностью, то

$$\forall k > 0 \quad \forall N \quad \exists n > N \quad a_n \leqslant k. \tag{10.10}$$

Также $\{a_n\}$ не является отрицательной последовательностью, поэтому

$$\forall l > 0 \quad \forall N \quad \exists n > n \quad a_n \geqslant -l. \tag{10.11}$$

Нужно показать, что $\{a_n\}$ — нулевая последовательность, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \quad -\varepsilon \leqslant a_n \leqslant \varepsilon. \tag{10.12}$$

Рассмотрим произвольное $\varepsilon > 0$. Покажем, что начиная с некоторого номера $a_n \leqslant \varepsilon$. Из фундаментальности $\{a_n\}$ для $\dfrac{\varepsilon}{2} > 0$ имеем:

$$\exists\, N \quad \forall n, m > N \text{справедливо} -\frac{\varepsilon}{2} < a_n - a_m < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{10.13}$$

Рассмотрим равенство

$$a_n = (a_n - a_m) + a_m. \tag{10.14}$$

В (10.13) возник номер N. По этому номеру N и по $k = \dfrac{\varepsilon}{2}$ условие (10.10) обеспечивает номер $m > N$ с неравенством $a_m \leqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$. В записи (10.14) считаем m данным фиксированным номером, а n — номером, который принимает все значения $> N$. Тогда верно $a_n \leqslant \varepsilon$.

Получили $a_n \leqslant \varepsilon$ начиная с некоторого номера. Аналогично проверяется то, что $a_n \geqslant -\varepsilon$ начиная с некоторого номера (будет задействована фундаментальность и неотрицательность). Итак, начиная с некоторого номера N_1 выполнено $a_n \leqslant \varepsilon$ и начиная с некоторого номера N_2 выполнено $-\varepsilon \leqslant a_n$. Тогда начиная с $N = \max(N_1, N_2)$ имеем $| a_n | \leqslant \varepsilon$. Теорема доказана.

Теорема 10.5 *Пусть $\{a_n\}$ — фундаментальная последовательность элементов поля P. Рассмотрим последовательность $\{a'_n\}$, полученную из $\{a_n\}$ отбрасыванием первых k членов. Тогда $\{a'_n\}$ — фундаментальная последовательность, эквивалентная последовательности $\{a_n\}$.*

Доказательство. Так как $\{a_n\}$ — фундаментальная последовательность, то выполнено условие

$$\forall \varepsilon \in P \; \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n, m > N \qquad | a_n - a_m | < \varepsilon. \tag{10.15}$$

Члены последовательности $\{a'_n\}$ имеют вид $\{a'_n\} = \{a_{n+k}\}$. То, что $\{a'_n\}$ — фундаментальная последовательность, записывается в виде

$$\forall \varepsilon \in P \; \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n, m > N \qquad | a_{n+k} - a_{m+k} | < \varepsilon. \tag{10.16}$$

Пусть задано $\varepsilon > 0$ и по нему найдено N в условии (10.15). Очевидно, данный номер N подходит в качестве номера N в (10.16). То, что последовательность

$\{a'_n\}$, эквивалентная последовательности $\{a_n\}$ означает $\lim(a'_n - a_n) = 0$. Поэтому нужно проверить

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \qquad | \, a_{n+k} - a_n \, | < \varepsilon.$$

Это следует из фундаментальности $\{a_n\}$. Теорема доказана.

Теперь мы можем завершить доказательство теоремы (10.3) Для этого проверим аксиому 8. Пусть $\alpha \in R$ и $\alpha \neq 0$. Покажем, что $\exists \alpha^{-1} \in R$ с условием $\alpha\alpha^{-1} = \alpha^{-1}\alpha = 1$.

Рассмотрим фундаментальную последовательность $\{a_n\} \in \alpha$. Так как $\alpha \neq 0$, то верно одно из двух утверждений:

1. $\{a_n\}$ — положительная последовательность.

2. $\{a_n\}$ — отрицательная последовательность.

Если $\{a_n\}$ — отрицательная последовательность, то $\{-a_n\}$ — положительная последовательность и $\{-a_n\} \in -\alpha$. Предположим, что для случая 1 утверждение доказано. Тогда $\quad \exists \beta \quad (-\alpha)\beta = 1$. Отсюда $\alpha \cdot (-\beta) = 1$ и $\alpha^{-1} = -\beta$. Поэтому достаточно рассмотреть только первый случай.

Итак, считаем, что $\{a_n\}$ — положительная последовательность. Поэтому начиная с некоторого номера $a_n > k$, где $k > 0$ — фиксированное рациональное число.

Удалим начальные члены в $\{a_n\}$ и оставим те члены, для которых $a_n > k$. Получим последовательность из этого класса. Поэтому можно считать, что

$$\forall n \quad a_n > k. \tag{10.17}$$

Рассмотрим последовательность $\{\frac{1}{a_n}\}$. Если она фундаментальна, то класс β, где $\frac{1}{a_n} \in \beta$, удовлетворяет равенству $\alpha \cdot \beta = 1$, т.е. $\beta = \alpha^{-1}$.

Поэтому осталось проверить, что последовательность $\{\frac{1}{a_n}\}$ является фундаментальной, т.е.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n, m > N \quad \left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a_m}\right| < \varepsilon. \tag{10.18}$$

Запишем неравенство $\left|\frac{a_m - a_n}{a_n \cdot a_m}\right| < \varepsilon$ в виде $\frac{|\, a_m - a_n \,|}{|\, a_n \,| \cdot |\, a_m \,|} < \varepsilon$. Имеем

$$\frac{|\, a_m - a_n \,|}{|\, a_n \,| \cdot |\, a_m \,|} < \frac{|\, a_m - a_n \,|}{k^2}.$$

Достаточно найти номер N такой, что для всех $n, m > N$ выполняляется неравенство

$$\frac{|\, a_m - a_n \,|}{k^2} < \varepsilon,$$

т.е.

$$| a_m - a_n | < \varepsilon \cdot k^2 = \varepsilon_1.$$

По определению фундаментальности для данного $\varepsilon_1 > 0$ существует N, такое, что выполнено неравенство $| a_m - a_n | < \varepsilon_1$, что и нужно.

Аксиома 8 проверена, что завершает доказательство теоремы (10.3).

Мы построили действительные числа в виде классов фундаментальных последовательностей. Однако у нас еще нет связи с обычным представлением действительных чисел в виде бесконечных десятичных дробей. Эта связь будет установлена в последующих лекциях.

Аксиомы поля утверждают о выполнимости основных арифметических законов для сложения и умножения действительных чисел. Поэтому в дальнейшем без каких-либо указаний применяем такие арифметические законы, как коммутативность, ассоциативность и т.д.

Следующий шаг – обнаружение во множестве действительных чисел подмножества рациональных чисел. Однако, это будут «новые рациональные числа», поскольку невозможно совпадение «старых рациональных чисел» и построенных действительных чисел. Невозможность совпадения следует из того, что действительные числа α, β, γ — это классы фундаментальных последовательностей рациональных чисел. По этой причине нельзя записать, например, равенство $\alpha = \frac{1}{2}$, т.к. в левой части этого равенства объект одной природы, а в правой – другой. Аналогично, при построении Z мы имели вначале $N \not\subseteq Z$. Однако затем внутри Z была найдена подалгебра Z^+, изоморфная алгебре N и мы отождествили N и Z^+. Обнаружим теперь в поле R подполе, изоморфное полю Q.

Теорема 10.6 *Поле действительных чисел имеет подполе, изоморфное полю рациональных чисел.*

Доказательство. Для любого рационального числа a определим класс $a' \in R$ следующим правилом:

$$\text{класс } a' \text{ содержит постоянную последовательность } a, a, a, \ldots \tag{10.19}$$

Такой класс существует, т.к. постоянная последовательность фундаментальна. Рассмотрим подмножество Q', состоящее из всех классов a':

$$Q' = \{a' \mid a \in Q\}. \tag{10.20}$$

Итак, для каждого «старого рационального числа» $a \in Q$ определено «новое рациональное число» $a' \in R$. Из определения сложения и умножения классов получаем равенства.

$$a' + b' = (a+b)'$$
$$a'b' = (ab)'$$

Отсюда видно, что сумма и произведение элементов из Q' содержатся в Q'. Получили алгебру $(Q', +, \cdot)$. Рассмотрим отображение $f : Q \to Q'$, где $f(a) = a'$.

Теорема 10.7 *Справедливы следующие два утверждения.*

1. *Отображение* f *является изоморфизмом алгебры* $(Q, +, \cdot)$ *на алгебру* $(Q', +, \cdot)$.

2. *Множество* Q' *является полем, изоморфным полю* Q.

Доказательство. Проверим вначале биективность отображения f.

Инъективность. Пусть $a, b \in Q$ и $a \neq b$. Покажем, что $a' \neq b'$. Предположим противное, т.е. $a' = b'$. Тогда постоянные последовательности $a, a, \dots$ и $b, b, \dots$ из классов a' и b' эквивалентны и их разность $a - b, a - b, \dots$ является нулевой последовательностью. Предел постоянной последовательности $a - b, a - b, \dots$ равен $a - b$. Поэтому $a - b = 0$, $a = b$, противоречие с $a \neq b$.

Сюръективность. Пусть $x \in Q'$. Тогда $x = a'$ для некоторого $a \in Q$ по построению множества Q'. Поэтому $f(a) = x$, т.е. a — прообраз элемента x при отображении f.

Итак, f биективно, и осталось проверить условия изоморфизма $f(a+b) = f(a) + f(b)$ и $f(ab) = f(a)f(b)$, т.е. равенства

$$(a+b)' = a' + b' \text{ и } (ab)' = a'b'.$$

Так как класс a' содержит последовательность $a, a, \ldots$, b' содержит последовательность $b, b, \ldots$, то классы $a' + b'$ и $a'b'$ содержат соответственно последовательности $a+b, a+b, \ldots$ и $ab, ab, \ldots$. Поэтому $a'+b' = (a+b)'$ и $a'b' = (ab)'$, что и нужно. Пункт 1 доказан.

Установим пункт 2. Мы имеем изоморфные алгебры $(Q, +, \cdot)$ и $(Q', +, \cdot)$, причем алгебра $(Q, +, \cdot)$ является полем. Тогда алгебра $(Q', +, \cdot)$ также является полем. Теорема доказана.

Лекция 11. Упорядоченность поля действительных чисел.

Введем отношение $>$ в поле R. Для этого рассмотрим ряд предварительных результатов.

Теорема 11.1 *Пусть $\alpha \in R$ и $\{a_n\} \in \alpha$. Рассмотрим произвольную последовательность $\{b_n\}$ из класса α. Справедливы следующие утверждения.*

1. *Если последовательность $\{a_n\}$ положительна, то и последовательность $\{b_n\}$ положительна;*
2. *Если последовательность $\{a_n\}$ нулевая, то и последовательность $\{b_n\}$ нулевая.*
3. *Если последовательность $\{a_n\}$ отрицательна, то и последовательность $\{b_n\}$ отрицательна.*

Доказательство 1. Пусть последовательность $\{a_n\}$ положительна, т.е. все ее члены, начиная с некоторого номера N, больше некоторого положительного числа k. Если в $\{a_n\}$ отбросить некоторое число начальных членов, то получившаяся последовательность содержится в том же классе α. Отбросим все члены из $\{a_n\}$ до данного номера N. Потому можно считать, что все члены последовательности $\{a_n\}$ больше числа k, Так как последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ содержатся в одном классе, то они эквивалентны. Поэтому $\{b_n\} = \{a_n\} + \{c_n\}$, где $\{c_n\}$ — нулевая последовательность. Это означает, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n > N \mid c_n \mid < \varepsilon. \tag{11.1}$$

Рассмотрим число $\varepsilon = \dfrac{k}{2}$ и по нему найдем номер N из (11.1). Для всех $n > N$ имеем $\mid c_n \mid < \varepsilon = \dfrac{k}{2}$. Тогда для всех $n > N$ имеем $-\dfrac{k}{2} < c_n$, откуда

$$b_n = a_n + c_n > k - \frac{k}{2} = \frac{k}{2}.$$

Поэтому $\{b_n\}$ — положительная последовательность.

2. Пусть последовательность $\{a_n\}$ нулевая. Как уже отмечалось, класс 0 содержит все нулевые последовательности. Поэтому $\{a_n\} \in 0$. Тогда эквивалентная ей последовательность $\{b_n\}$ также принадлежат классу 0. Однако, класс 0 содержит только нулевые последовательности. Поэтому $\{b_n\}$ — нулевая последовательность.

3. Пусть последовательность $\{a_n\}$ отрицательна. Эквивалентная ей последовательность $\{b_n\}$ не может быть положительной или отрицательной, иначе по пунктам 1 или 2 такова же последовательность $\{a_n\}$. Следовательно, последовательность $\{b_n\}$ отрицательна. Теорема доказана.

Тем самым мы получили, что либо все последовательности класса положительны, либо все отрицательны, либо все нулевые. В последнем случае класс α однозначно определен — это класс 0.

Назовем класс $\alpha \in R$ *положительным классом*, если все последовательности класса положительны. Класс $\alpha \in R$ называется *отрицательным классом*, если все последовательности класса отрицательны.

Следовательно, если $\alpha \in R$, то выполнено одно и только одно из утверждений:

α — положительный класс;
α — нулевой класс, т.е. $\alpha = 0$;
α — отрицательный класс.

Множество положительных классов обозначим через R^+.

Теорема 11.2 *Множество отрицательных классов совпадает с множеством* $-R^+ = \{-x \mid x \in R^+\}$.

Доказательство. Обозначим через R_1 множество отрицательных классов. Необходимо доказать равенство множеств $-R^+ = R_1$.

Проверим, что $-R^+ \subseteq R_1$. Произвольный класс $\beta \in -R^+$ имеет вид $-\alpha$, где α — положительный класс, содержащий положительную последовательность $\{a_n\}$. Тогда класс $\beta = -\alpha$ содержит последовательность $\{-a_n\}$, которая отрицательна. Поэтому β — отрицательный класс и $\beta \in R_1$.

Установим, что $R_1 \subseteq -R^+$. Пусть β — произвольный класс из R_1 Класс β содержит отрицательную последовательность $\{a_n\}$. Рассмотрим запись $\beta = -(-\beta)$ и обозначим $\alpha = -\beta$. Тогда $\beta = -\alpha$, где α— положительный класс, т.к. содержит положительную последовательность $\{-a_n\}$. Поэтому $\beta \in -R^+$. Теорема доказана.

Теорема 11.3 *Поле действительных чисел является упорядоченным полем.*

Доказательство. Покажем вначале, что подмножества R^+, $\{0\}$, $-R^+$ образуют разбиение множества R. Применим утверждение, полученное выше. Для любого $\alpha \in R$ верно одно и только одно из утверждений: α — положительный класс, $\alpha = 0$, α — отрицательный класс. С учетом предыдущей теоремы это означает: для любого $\alpha \in R$ верно одно и только одно:

$$\alpha \in R^+, \ \ \alpha \in \{0\}, \ \ \alpha \in -R^+.$$

Поэтому подмножества R^+, $\{0\}$, $-R^+$ образуют разбиение множества R.

Осталось проверить, что для всех $\alpha, \beta \in R^+$ справедливо $\alpha + \beta \in R^+$ и $\alpha\beta \in R^+$. Рассмотрим последовательности $\{a_n\} \in \alpha$ и $\{b_n\} \in \beta$. Последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ положительны. Легко проверить, что $\{a_n\} + \{b_n\}$ и $\{a_n\}\{b_n\}$

положительны. Так как $\{a_n\} + \{b_n\} \in \alpha + \beta$ и $\{a_n\}\{b_n\} \in \alpha\beta$, то $\alpha + \beta$ и $\alpha\beta$ — положительные классы. Тогда $\alpha + \beta, \alpha\beta \in R^+$, что и нужно. Теорема доказана.

Поскольку поле R упорядочено, то для действительных чисел справедливы стандартные свойства отношения $>$, которые мы доказали для произвольного упорядоченного кольца.

Замечание. Рассмотрим изоморфизм f алгебр $(Q, +, \cdot)$ и $(Q', +, \cdot)$, из теоремы (10.7), где $f(a) = a'$. Тогда

$$a'_n < b'_n \Leftrightarrow a < b \text{ для всех } a, b \in Q. \tag{11.2}$$

Доказательство самостоятельно.

Аксиома Архимеда. С понятием измерения тесно связано математическое понятие — аксиома Архимеда. Предположим, что у нас есть отрезок a и отрезок b — эталон, который выбран за единицу измерения. Мы накладываем эталон на измеряемый отрезок a несколько раз. Предположим, что мы наложили эталон $n-1$ раз и следующее n наложение выводит нас за пределы отрезка. Мы говорим, что длина отрезка a больше или равна $n-1$, но меньше n. При этом мы убеждены, что такое число n всегда существует.

Пусть K – произвольное упорядоченное кольцо.

Определение 11.1 *Кольцо K называется архимедовски упорядочен-*

ным, если выполняется следующее условие, называемое аксиомой Архимеда:

$$\forall a, b \in K, \text{где } b > 0 \quad \exists n \quad nb > a. \tag{11.3}$$

Рассмотрим условие для множества N, аналогичное условию (11.3). Его также назовем аксиомой Архимеда для натуральных чисел, несмотря на то, что натуральные числа не образуют кольцо.

Проверим, что

$$\forall a, b \in N \quad \exists n \quad nb > a. \tag{11.4}$$

Возьмем в качестве n число $a+1$. Тогда $nb = (a+1)b = ab + b$. Нужно проверить, что $ab + b > a$. При $b = 1$ получим $a + 1 > a$, что верно по определению отношения $>$. Если $b \neq 1$, то $b > 1$, $ab > a$ и $ab + b > ab > a$, откуда $ab + b > a$.

Теорема 11.4 *Кольцо целых чисел архимедовски упорядочено.*

Доказательство. Пусть $x, y \in Z$ и $y > 0$. Нужно найти $n \in N$ с условием $ny > x$.

Пусть $x \leqslant 0$, т.е. $0 \geqslant x$. Из $y > 0$ и $0 \geqslant x$ следует $y > x$. Поэтому неравенство $ny > x$ справедливо при $n = 1$.

Пусть $x > 0$. Учитывая $y > 0$, получаем $x, y \in Z^+$. Однако алгебра $(Z^+, +, \cdot)$ изоморфна алгебре натуральных чисел $(N, +, \cdot)$, для которой аксиомой Архимеда уже проверена.

Нетрудно проверить, что для изоморфизма $f : N \to N'$, где $f(k) = k'$, выполнено условие $k > l \Leftrightarrow f(k) > f(l)$. Следовательно, алгебры N' и N имеют одинаковые свойства относительно отношения $>$.

Поэтому в изоморфной алгебре $(Z^+, +, \cdot)$ для $x, y \in Z^+$ существует n с условием $ny > x$. Теорема доказана.

ТЕОРЕМА 11.5 *Поле рациональных чисел архимедовски упорядочено.*

Доказательство. Пусть $x, y \in Q$ и $y > 0$. Необходимо найти $n \in N$ с условием $ny > x$. Если $x \leqslant 0$, то возьмем $n = 1$.

Пусть $x > 0$. Тогда $x, y > 0$. Имеем $x = \dfrac{a}{b}$, где $a, b > 0$ или $a, b < 0$. В случае $a, b < 0$ запишем $x = \dfrac{-a}{-b}$ и сведем его к случаю $a, b > 0$. То же самое сделаем с элементом y. Поэтому считаем, что для некоторых $a, b, c, d \in Z$, где $a, b, c, d > 0$, выполнено

$$x = \frac{a}{b} \quad \text{и} \quad y = \frac{c}{d}. \tag{11.5}$$

Имеем $\dfrac{a}{b} + \dfrac{a}{b} = \dfrac{ab + ba}{bb} = \dfrac{2a}{b}$ и по индукции проверяем $n\dfrac{a}{b} = \dfrac{na}{b}$.

По определению отношения $>$ для рациональных чисел получаем $ny > x \quad \Leftrightarrow \quad ny - x$ — положительный класс. Нужно найти $n \in N$ такое, что

$$ny - x = \frac{nc}{d} + \frac{-a}{b} = \frac{ncb + (-ad)}{ab} \text{ — положительный класс.}$$

При этом $db > 0$ Следовательно, необходимо найти натуральное число n с условием $ncb - ad > 0$, т.е. с условием $n(cb) > ad$. Тем самым для целых чисел $cb, ad > 0$ нужно найти натуральное n с условием $n(cb) > ad$. Это верно в силу справедливости аксиомы Архимеда для кольца Z. Теорема доказана.

Для доказательства архимедовской упорядоченности поля R нужны некоторые предварительные результаты.

Теорема 11.6 *Пусть $\{a_n\} \in \alpha$ и $\{b_n\} \in \beta$ для $\alpha, \beta \in R$. Предположим, что $a_n \geqslant b_n$ для всех $n \in N$. Тогда $\alpha \geqslant \beta$.*

Доказательство. Мы должны показать, что неравенство $a_n \geqslant b_n$ между членами последовательностей переносится на классы, содержащие эти последовательности.

Предположим, что неравенство для классов $\alpha \geqslant \beta$ не выполнено. Тогда $\beta > \alpha$, $\beta - \alpha \in R^+$, т.е. $\beta - \alpha$ — положительный класс. Следовательно, последовательность $\{b_n - a_n\}$ из класса $\beta - \alpha$ является положительной последовательностью. Поэтому все ее члены, начиная с некоторого номера, больше фиксированного $k > 0$. Если у последовательности отбросить начальные члены, то получится последовательность из этого же класса. Отбрасывая, если нужно, начальные члены у последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, считаем, что $b_n - a_n > k$ для всех n. Тогда $a_n - b_n < -k$, где $-k < 0$. Отсюда $a_n - b_n < 0$. По условию $a_n > b_n$, т.е. $a_n - b_n > 0$, противоречие. Значит $\alpha \geqslant \beta$. Теорема доказана.

Замечание 1. Если $a_n \geqslant b_n$ выполняется не с первого номера, а начиная с некоторого, то все равно $\alpha \geqslant \beta$. Отбросим начальные члены в $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ и применим предыдущую теорему.

Замечание 2. Заменим в условии теоремы неравенство $a_n \geqslant b_n$ на неравенство $a_n > b_n$ и выскажем гипотезу: $a_n > b_n$ для всех n влечет $\alpha > \beta$. Это утверждение неверно. Верно лишь, что $\alpha \geqslant \beta$.

Контрпример. Пусть $a_n = \dfrac{1}{n}$, а последовательность $\{b_n\}$ — последовательность с нулевыми членами. Имеем $a_n > b_n$ для всех n. Однако обе последовательности имеют предел ноль, и содержатся в одном классе 0.

Теорема 11.7 *Поле действительных чисел является архимедовски упорядоченным полем.*

Доказательство. По теореме 11.3 R — упорядоченное поле. Достаточно проверить только аксиому Архимеда.

Пусть $\alpha, \beta \in R$ и $\beta > 0$. Нужно найти натуральное число m с условием $m\beta > \alpha$. Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — последовательности из классов α и β. Так как $\beta > 0$, то β — положительный класс и последовательность $\{b_n\}$ положительна. Все ее члены, начиная с некоторого номера, больше некоторого фиксированного $k_1 > 0$. Отбрасывая начальные члены, считаем

$$\text{для всех } n \in N \text{ справедливо } b_n > k_1. \tag{11.6}$$

Последовательность $\{a_n\}$ — фундаментальная последовательность и, поэтому, ограничена. Тогда существует $k_2 > 0$, такое, что для для всех $n \in N$ имеем $| a_n |< k_2$. Поэтому,

$$a_n < k_2 \text{ для всех } n \in N. \tag{11.7}$$

Применим аксиому Архимеда к рациональным числам $k_1 > 0$ и k_2. Получим натуральное число m с условием $mk_1 > k_2$. Применив (11.7), получим $mk_1 > a_n$. По (11.6) имеем $b_n > k_1$, $mb_n > mk_1$ и с учетом $mk_1 > a_n$ получим $mb_n > a_n$. При этом последовательность $\{mb_n\}$ взята из класса $m\beta$, последовательность $\{a_n\}$ взята из класса α. По замечанию 2 получаем

$$m\beta \geqslant \alpha. \tag{11.8}$$

Если в (11.8) выполнено строгое неравенство, требуемое число m с условием $m\beta > \alpha$ найдено. Если выполнено $m\beta = \alpha$, то возьмем вместо m число $m+1$. Получим $(m+1)\beta > \alpha$, что и нужно. Теорема доказана.

Полнота поля R. Поле рациональных чисел и поле действительных чисел обладают многими общими свойствами. Эти свойства отражены в аксиомах поля. Кроме того, оба поля имеют отношение $>$, для которого справедливы стандартные свойства неравенств. Однако поле R и поле Q имеют следующее важное различие. Составим фундаментальную последовательность $\{a_n\}$ из элементов поля Q и рассмотрим вопрос: существует ли в поле Q предел последовательности $\{a_n\}$.

Рассмотрим, например, последовательности $\{a_n\}$, рациональных приближений числа $\sqrt{2}$:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{14}{10}, \quad a_3 = \frac{141}{10^2}, \quad a_2 = \frac{1414}{10^3}, \dots .$$

Имеем последовательность $\{a_n\}$ элементов поля Q с пределом $\sqrt{2} \in R$. Так как последовательность $\{a_n\}$ имеет предел, то она фундаментальна.

Однако у нее нет предела α в поле Q, иначе последовательность $\{a_n\}$ имела бы два разных предела $\alpha \in Q$ и $\sqrt{2} \notin Q$, что невозможно.

Определение 11.2 *Упорядоченное поле P называется полным, если всякая фундоментальная последовательность элементов поля P имеет предел в поле P.*

Тем самым поле Q не является полным полем. С другой стороны мы покажем, что поле R является полным полем. Понятие полноты поля является принципиально важным в математическом анализе, где оно проявляется во многих формах.

Для доказательства полноты поля R мы рассмотрим теорию десятичных дробей. Кроме того, теория десятичных дробей указывает другой способ построения поля R.

Лекция 12. Десятичные дроби.

В школьном курсе математики вводятся бесконечные десятичные дроби. Это выражения вида

$$\pm p, q_1 q_2 \dots \tag{12.1}$$

где p — группа цифр до запятой, а $q_1, q_2, \dots$ — бесконечная последовательность цифр после запятой. В данной лекции мы сопоставим каждому действительному числу бесконечную десятичную дробь. Для этого потребуется ряд предварительных результатов.

Теорема 12.1 *Пусть α — действительное число. Тогда существует однозначно определенное целое число M с условием*

$$M \leqslant \alpha < M + 1. \tag{12.2}$$

Доказательство. Рассмотрим последовательность $\{a_n\} \in \alpha$. Так как $\{a_n\}$ фундаментальна, то она ограничена. Тогда существует рациональное число k с условием $| a_n |< k$, т.е. с условием $-k < a_n < k$ для всех $n \in N$.

Применим аксиому Архимеда к числам $1 > 0$ и k. Получим натуральное число l с условием $1 \cdot l > k$, т.е. $l > k$. Имеем $l > k$, $-l < -k$ и $-k < a_n < k$, откуда

$$-l < a_n < l. \tag{12.3}$$

При рассмотрении вопроса о вложении Q в R мы отождествили действительное число, содержащее постоянную последовательность $a, a, \dots$ с рациональным числом a. Поэтому далее используем следующее соглашение: действительное число l', содержащее последовательность $l, l, \dots$ мы также обозначаем через l.

Из (12.3) по замечанию 2 из предыдущей лекции получаем

$$-l \leqslant \alpha \leqslant l \tag{12.4}$$

(если не придерживаться приведенного выше соглашения, то вместо l неравенствах нужно записывать l').

Рассмотрим промежутки

$$\begin{aligned} A_1 &= \{x \in R \mid -l \leqslant x < -l + 1\}, \\ A_2 &= \{x \in R \mid -l + 1 \leqslant x < -l + 2\}, \\ &\dots \\ A_{2l} &= \{x \in R \mid l - 1 \leqslant x < l\}. \end{aligned}$$

Имеем $-l \leqslant \alpha$. Проверим условие $\alpha < -l + 1$. Если оно верно, то при этой, первой проверке установлено $\alpha \in A_1$. Тогда $M = -l$.

Пусть $\alpha < -l + 1$ не выполнено, т.е. $-l + 1 \leqslant \alpha$. Тогда выполним вторую проверку $\alpha < -l + 2$. Если неравенство верно, то $\alpha \in A_2$ и $M = -l + 1$. Если после $2l-1$ проверки число M еще не найдено, то $\alpha \geqslant -l+(2l-1)=l-1$, Учтем, что $\alpha < l$. Тогда $M=l-1$.

Установим однозначность числа M. Достаточно проверить, что при $i<j$ выполняется $A_i \cap A_j = \emptyset$. Если $x \in A_1$ и $y \in A_2$, то $x<y$. Это следует из неравенств $x<-l+1$, $-l+1 \leqslant y$. Аналогично, $x<y$ для $x \in A_2$ и $y \in A_3$. Получаем $x<y$ для $x \in A_i$ и $y \in A_j$ при $i<j$. Поэтому $A_i \cap A_j = \emptyset$. Теорема доказана.

Сопоставим теперь каждому действительному числу α десятичную дробь. При этом считаем, что $\alpha \geqslant 0$. Если действительное число β отрицательно, т.е. $\beta = -\alpha$, где $\alpha > 0$, то десятичную дробь для β получается из. десятичной дроби для α приписыванием к ней знака минус.

Пусть $\alpha \in R$ и $\alpha \geqslant 0$. По теореме (12.1) существует $M_0 \in Z$ с условием $M_0 \leqslant \alpha < M_0+1, \quad M_0 \geqslant 0$. Заменим число α на 10α и применим теорему к числу 10α. Получим $M_1 \leqslant 10\alpha < M_1+1$. Тогда $\dfrac{M_1}{10} \leqslant \alpha < \dfrac{M_1+1}{10}$. Далее возьмем $10^2\alpha$, получим: $\dfrac{M_2}{10^2} \leqslant \alpha < \dfrac{M_2+1}{10^2}$ и так далее. Получается бесконечная совокупность неравенств:

$$
\begin{aligned}
M_0 &\leqslant \alpha \leqslant M_0 + 1 \\
\frac{M_1}{10^1} &\leqslant \alpha < \frac{M_1 + 1}{10^1} \\
\frac{M_2}{10^2} &\leqslant \alpha < \frac{M_2 + 1}{10^2} \\
&\dots \\
\frac{M_n}{10^n} &\leqslant \alpha < \frac{M_n + 1}{10^n} \qquad (*) \\
\frac{M_{n+1}}{10^{n+1}} &\leqslant \alpha < \frac{M_{n+1} + 1}{10^{n+1}} \qquad (**) \\
&\dots
\end{aligned}
\tag{12.5}
$$

Теорема 12.2 *Последовательности из левых частей и правых частей неравенств в (12.5) имеют предел равный α, т.е.*

$$\lim \frac{M_n}{10^n} = \alpha \quad \text{и} \quad \lim \frac{M_n + 1}{10^n} = \alpha.$$

Доказательство. Индукцией по n легко проверить неравенство $10^n > n$. По свойству 9 из лекции 7 $\dfrac{1}{10^n} < \dfrac{1}{n}$. Пусть $\varepsilon \in Q$ и $\varepsilon > 0$. Применим аксиому

Архимеда к числам $1 > 0$ и $\frac{1}{\varepsilon}$. Получим натуральное число N с условием $N1 > \frac{1}{\varepsilon}$, т.е. $N > \frac{1}{\varepsilon}$. Для всех натуральных чисел $n > N$ имеем $n > \frac{1}{\varepsilon}$, т.е. $\frac{1}{n} < \varepsilon$. Учитывая $\frac{1}{10^n} < \frac{1}{n}$, получим $\frac{1}{10^n} < \varepsilon$ всех натуральных чисел $n > N$.

Из неравенств (*) получаем $\mid \alpha - \frac{M_n}{10^n} \mid \leqslant \frac{M_n+1}{10^n} - \frac{M_n}{10^n} = \frac{1}{10^n} < \varepsilon$ для всех натуральных чисел $n > N$. Поэтому $\lim \frac{M_n}{10^n} = \alpha$.

Далее $\mid \alpha - \frac{M_n+1}{10^n} \mid = \frac{M_n+1}{10^n} - \alpha \leqslant \frac{M_n+1}{10^n} - \frac{M_n}{10^n} = \frac{1}{10^n} < \varepsilon$ для всех натуральных чисел $n > N$. Поэтому $\lim \frac{M_{n+1}}{10^n} = \alpha$. Теорема доказана.

Теорема 12.3 *Каждое число M_{n+1} получается из числа M_n приписыванием справа одной из цифр* $0, 1, 2, \ldots, 9$.

Доказательство. Рассмотрим два последовательных неравенства из (12.5) (*) и (**). Из левой части неравенства (*) имеем

$$\frac{M_n}{10^n} \leqslant \alpha, \quad \text{т.е.} \quad \frac{10M_n}{10^{n+1}} \leqslant \alpha.$$

Из правой части неравенства (**) имеем

$$\alpha < \frac{M_{n+1}+1}{10^{n+1}}.$$

Отсюда $10M_n < M_{n+1}+1$, а учитывая, что члены неравенства — целые числа, имеем

$$10M_n \leqslant M_{n+1}. \tag{12.6}$$

Сопоставим левую часть неравенства (**), т.е. $\dfrac{M_{n+1}}{10^{n+1}} \leqslant \alpha$ с правой частью неравенства (*)

$$\alpha < \frac{M_n+1}{10^n} = \frac{10M_n+10}{10^{n+1}}.$$

Получим $M_{n+1} < 10M_n + 10$, откуда

$$M_{n+1} \leqslant 10M_n + 9. \tag{12.7}$$

Неравенства (12.6) и (12.7) утверждают, что $M_{n+1} = 10 \cdot M_n + r$, где r принимает одно из значений $0, 1, 2, \ldots 9$. Это означает, что M_n — частное, а r — остаток при делении числа M_{n+1} на 10. Запись $M_{n+1} = 10 \cdot M_n + r$ означает, что к M_n приписали цифру r и получили M_{n+1}. Например, приписав к 12 цифру 7, получим $127 = 12 \cdot 10 + 7$.

Итак, число M_{n+1} получается из числа M_n приписыванием справа ровно одной цифры, что и требовалось доказать. Теорема доказана.

Рассмотрим неравенства (12.5). Запишем число M_0 в десятичной системе счисления. Получим последовательность цифр $p_k p_{k-1} \dots p_1 p_0$, изображающих число M_0. Например, последовательность цифр 312 изображает число $3 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 2$.

Обозначим группу цифр $p_k p_{k-1} \dots p_1 p_0$ через p. Поставим после этой группы цифр запятую «,». Далее будем изображать десятичными цифрами числа $M_1, M_2, \dots$. Каждое следующее изображение числа M_i добавляет новую цифру q_i к ранее полученной последовательности цифр.

Итак, мы поставили после группы цифр, изображающих M_0, запятую и выписали бесконечную последовательность цифр $q_1 q_2 q_3 \dots$ после запятой. Получили выражение:

$$p, q_1 q_2 q_3 \dots \tag{12.8}$$

где через p обозначена группа цифр $p_k p_{k-1} \dots p_1 p_0$ до запятой. Выражение (12.8) называется *десятичной дробью, изображающей число α.*

Будем говорить,что десятичная дробь (12.8) *имеет 9 в периоде*, если все ее цифры, начиная с некоторого места равны 9. Поэтому дробь (12.8) имеет 9 в периоде, если $q_{n+1} = 9, q_{n+2} = 9 \dots$ для некоторого номера n.

ТЕОРЕМА 12.4 *Десятичная дробь (12.8), изображающая действительное число, не может иметь 9 в периоде.*

Доказательство. Предположим противное, для некоторого n, все цифры в дроби с номерами $> n$ равны 9, т.е. $q_{n+1} = 9,\ q_{n+2} = 9,\ \ldots$. Число M_{n+1} получено из числа M_n приписыванием цифры $q_{n+1} = 9$, т.е. $M_{n+1} = 10M_n + 9$. Тогда $M_{n+1} + 1 = 10M_n + 10$ и

$$\frac{M_{n+1}+1}{10^{n+1}} = \frac{10M_n+10}{10^{n+1}} = \frac{M_n+1}{10^n}.$$

Получили

$$\frac{M_{n+1}+1}{10^{n+1}} = \frac{M_n+1}{10^n}.$$

Аналогично получаем

$$\frac{M_{n+2}+1}{10^{n+2}} = \frac{M_{n+1}+1}{10^{n+1}},\ \frac{M_{n+3}+1}{10^{n+3}} = \frac{M_n+2}{10^{n+2}},\ldots.$$

Получили, что все члены последовательности, составленной из правых частей в (12.5), начиная с некоторого места равны числу $\dfrac{M_n+1}{10^n}$. Тогда предел этой последовательности равен этому числу. Однако по теореме (12.2) рассматриваемый предел равен α. Поэтому $\alpha = \dfrac{M_n+1}{10^n}$. Это противоречит неравенству $\alpha < \dfrac{M_n+1}{10^n}$ из (12.5). Допущение, что дробь (12.8) имеет 9 в периоде дает противоречие. Теорема доказана.

Теорема 12.5 *Всякая десятичная дробь без 9 в периоде изображает некоторое действительное число.*

Доказательство теоремы разобьем на несколько шагов. Пусть задана десятичная дробь

$$p, q_1 q_2 q_3 \ldots, \tag{12.9}$$

которая не имеет 9 в периоде.

Шаг 1. Рассмотрим последовательность рациональных чисел $\{a_n\} = \{p, q_1 q_2 \ldots q_n\}$. Ее члены конечные десятичные дроби

$$p, q_1; \quad p, q_1 q_2; \quad p, q_1 q_2 q_3 \ldots,$$

т.е. рациональные числа

$$\frac{pq_1}{10}, \quad \frac{pq_1 q_2}{10^2}, \quad \frac{pq_1 q_2 q_3}{10^3}, \quad \ldots.$$

Например, для дроби $3,1415\ldots$ получаем последовательность

$$\frac{31}{10^1}, \frac{314}{10^2}, \frac{3141}{10^3}, \ldots.$$

Шаг 2. Проверим, что последовательность $\{a_n\}$ фундаментальна, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует номер N, такой, что для всех $m, n > N$ выполнено неравенство

$$| a_m - a_n |< \varepsilon. \tag{12.10}$$

Можно считаь, что $m > n$. Тогда выполнено неравенство

$$| a_m - a_n | = 0,\underbrace{0\ldots0}_{n \text{ раз}}\underbrace{q_{n+1}q_{n+2}\ldots q_m}_{m-n \text{ раз}} \leqslant \tag{12.11}$$

$$\leqslant 0,\underbrace{0\ldots0}_{n \text{ раз}}\underbrace{99\ldots9}_{m-n \text{ раз}} < \frac{1}{10^n} < \varepsilon. \tag{12.12}$$

По заданному числу $\varepsilon\ >$ существует номер N с условием $\dfrac{1}{10^N} < \varepsilon$. Тогда предыдущее неравенство справедливо для всех $n, m > N$.

Так как последовательность $\{a_n\}$ фундаментальна, то существует класс $\alpha \in R$, содержащий последовательность $\{a_n\}$.

Шаг 3. Проверим, что десятичная дробь для класса α совпадает с наперед заданной десятичой дробью (12.9). Зафиксируем призвольный номер n. Для всех $m > n$ имеем неравенство

$$p, q_1q_2q_3\ldots q_n\ldots q_m \geqslant p, q_1q_2q_3\ldots q_n. \tag{12.13}$$

В теореме (10.7) мы рассматривали подполе Q' в R, изоморфное полю рациональных чисел и состоящее из «новых рациональных чисел», а именно, классов a', содержащих постоянную последовательность $a, a, \ldots$.. Мы договорились обозначать этот класс тем же знаком a, что и рациональное число a, т.е. $a' = a$. Для того, чтобы отличать, что речь идет об обычном рациональном числе a записываем $a \in Q$. Если речь идет об классе, содержащем постоянную последовательность $a, a, \ldots$, то записываем $a \in R$.

Неравенство (12.13) — это неравенство для членов последовательности $\{a_n\}$ из класса $\alpha \in R$ и постоянной последовательности $a_n, a_n, \ldots$ из класса $a_n \in R$. Начиная с некоторого номера члены первой последовательности больше или равны членов второй последовательности. По теореме (11.6) неравенство переносится на классы $\alpha \in R$ и $a_n \in R$, т.е.

$$\alpha \geqslant a_n. \tag{12.14}$$

Теперь учтем условие, что у десятичной дроби (12.9) нет 9 в периоде. Тогда не все цифры с номером $> n$ равны 9. Поэтому для нашего фиксированного номера n найдется номер $s > n$ с условием, что цифра $q_s \neq 9$. При любом $m > s$ справедливо неравенство для рациональных чисел из Q

$$a_m = p, q_1 q_2 \ldots q_n \ldots q_s \ldots q_m \leqslant p, q_1 q_2 \ldots q_n \underbrace{99 \ldots 9}_{s-n \text{ раз}}.$$

Итак, начиная с некоторого номера члены последовательности из класса α не превосходят соответствующих членов постоянной последовательности из «нового рационального числа» $p, q_1q_2\dots q_n\underbrace{9,9\dots9}_{s-n\text{ раз}} \in R$. По теореме (11.6) получаем неравенство для действительных чисел

$$\alpha \leqslant p, q_1q_2\dots q_n\underbrace{9,9\dots9}_{s-n\text{ раз}}.$$

Имеем $a_n = p, q_1q_2\dots q_n$. Учтем, что $p, q_1q_2\dots q_n\underbrace{9,9\dots9}_{s-n\text{ раз}} < a_n+\frac{1}{10^n}$ и получим $\alpha < a_n + \frac{1}{10^n}$.

Учитывая ранее полученное равенство $a_n \leqslant \alpha$, получаем двойное неравенство

$$a_n \leqslant \alpha < a_n + \frac{1}{10^n}. \tag{12.15}$$

Тем самым

$$\frac{pq_1q_2\dots q_n}{10^n} \leqslant \alpha < \frac{pq_1q_2\dots q_n+1}{10^n}. \tag{12.16}$$

Тогда при построении (12.5) десятичной дроби для числа α будем получать $M_0 = p$, $M_1 = pq_1$, $M_2 = pq_1q_2, \dots$.

Поэтому бесконечная десятичная дробь для числа α будет иметь вид $p, q_1q_2q_3\dots$. Мы получили наперед заданную дробь, что и нужно. Теорема доказана.

Лекция 13. Аксиоматическая характеризация поля действительных чисел.

Теорема 13.1 *Поле действительных чисел R является полным полем.*

Доказательство. Напомним, что упорядоченное поле P называется полным полем, если всякая фундаментальная последовательность элементов поля P имеет предел в поле P. Пусть $\{\alpha_n\}$— фундаментальная последовательность элементов поля R. Нужно найти элемент $\alpha \in R$ с условием $\lim \alpha_n = \alpha$, т.е. с условием

$$\forall \varepsilon \in R\, \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n, m > N \quad |\, \alpha_n - \alpha_m \,| < \varepsilon. \tag{13.1}$$

Рассмотрим вначале частный случай, когда $\{\alpha_n\}$—последовательность рациональных чисел, т.е. элементов поля $Q' = \{a' \mid a \in Q\}$. Тогда имеем $\alpha_n = a'_n$, где a'_n — класс, содержащий постоянную последовательность $a_n, a_n, \ldots$.

Мы применяем свойство, приведенное в замечании после доказательства теоремы (11.3)

$$a'_n < b'_n \Leftrightarrow a < b \text{ для всех } a, b \in Q. \tag{13.2}$$

Заметим также, что для любого $\varepsilon \in R$, где $\varepsilon > 0$, существует рациональное число $\varepsilon'_1 > 0$, где $\varepsilon_1 \in Q$, $\varepsilon_1 > 0$, с условием $\varepsilon'_1 < \varepsilon$. Поэтому в (13.1) можно заменить число $\varepsilon \in R$ на число $\varepsilon' \in Q'$. С учетом такой замены вместо (13.1) получим

$$\forall \varepsilon', \text{ где } \varepsilon \in Q, \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n, m > N \qquad -\varepsilon' < a'_n - a'_m < \varepsilon'. \tag{13.3}$$

Рассмотрим последовательность $\{a_n\}$ и покажем ее фундаментальность. Нужно проверить, что

$$\forall \varepsilon \in Q \ \varepsilon > 0 \quad \exists N \quad \forall n, m > N \qquad -\varepsilon < a_n - a_m < \varepsilon. \tag{13.4}$$

Это условие следует из (13.3) с учетом (13.2). Частный случай, доказан.

Рассмотрим общий случай. Введем последовательность рациональных чисел $\{a_n\}$. При этом a_n рациональное приближение действительного числа α_n с точностью до $\frac{1}{10^n}$. Тем самым $\mid \alpha_n - a_n \mid < \frac{1}{10^n}$. Тогда последовательность $\{a_n\}$ эквивалентна последовательность $\{\alpha_n\}$. Если мы покажем, что последовательность $\{a_n\}$ имеет предел $\alpha \in R$, то эквивалентная ей последовательность имеет тот же предел α в поле R.

Следовательно, нужно проверить сходимость в R последовательности $\{a_n\}$. По частному случаю достаточно проверить ее фундаментальность. Пусть $\varepsilon > 0$. Для рациональных приближний a_n действительного числа α_n подберем номер N_1 с условием: для всех $m, n > N_1$ справедливы неравенства

$$\mid \alpha_m - a_m \mid < \frac{1}{10^m} < \frac{\varepsilon}{3} \text{ и } \mid \alpha_n - a_m \mid < \frac{1}{10^n} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Из фундаментальности последовательности $\{\alpha_n\}$ существует номер N_2 с условием: для всех $m, n > N_2$ верно неравенство

$$\mid \alpha_m - \alpha_n \mid < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Пусть $N = \max(N_1, N_2)$. Тогда для всех $m, n > N$ имеем одновременно

$$\mid \alpha_m - a_m \mid < \frac{1}{10^m} < \frac{\varepsilon}{3}, \ \mid \alpha_n - a_m \mid < \frac{1}{10^n} < \frac{\varepsilon}{3}, \ \mid \alpha_m - \alpha_n \mid < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Отсюда для всех $m, n > N$ выполнено

$$| a_m - a_n |=| (a_m - \alpha_m) + (\alpha_m - \alpha_n) + (\alpha_n - a_n) |< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \quad (13.5)$$

Это означает фундаментальность последовательности $\{a_n\}$. Теорема доказана.

Итак, мы показали, что построенное нами поле действительных чисел R является архимедовски упорядоченное полным полем.

Этих свойств поля действительных чисел достаточно для доказательства свойств элементарных функций, изложения теории пределов и т.д. Поэтому при изучении курса математического анализа для компактности изложения зачастую просто сообщается о поле действительных чисел R как архимедовски упорядоченном полном поле, и не рассматриваются вопросы существования и единственности поля R. Мы показали существование поля действительных чисел. Осталось проверить его единственность с точностью до изоморфизма.

ТЕОРЕМА 13.2 *Всякое архимедовски упорядоченное полное поле изоморфно полю R.*

Доказательство. Пусть P —архимедовски упорядоченное полное поле. Так как P — поле P упорядочено, то по замечанию после доказательства теоремы (8.7) оно содержит подполе, изоморфное полю Q. Отождествляя изоморфные поля, получаем $Q \subseteq P$. Рассмотрим произвольную фундаментальную последовательность $\{a_n\}$ элементов поля Q и действительное число $\alpha \in R$, где $\{a_n\} \in \alpha$. В силу полноты поля P последовательность $\{a_n\}$ имеет предел $\alpha' \in P$. Пусть R' — множество всех таких пределов всевозможных фундаментальных последовательностей $\{a_n\}$, где $a_n \in Q \subseteq P$.

Все последовательности из класса α имеют вид $\{a_n\} + \{c_n\}$, где $\{c_n\}$ — нулевая последовательность и поэтому их предел также равен α'. Рассмотрим отображение $f : R \to R'$, сопоставляющее классу α элемент $\alpha' \in P$. Нетрудно произверить f изоморфизм алгебр $(R, +, \cdot)$ и $(R^{\cdot}, +, \cdot)$.

Поэтому R' — поле, изоморфное полю R.

Осталось проверить, что $R' = P$, т.е. любой элемент $a \in P$ содержится в R', т.е. он является пределом рациональной последовательности $\{a_n\}$. Рассмотрим процесс нахождения рациональных приближений элемента a из начала теории десятичных дробей. Пользуясь аксиомой Архимеда мы получим неравенства (12.5). В качесве $\{a_n\}$ можно взять последовательность из левых частей в (12.5). Теорема доказана.

Список литературы

[1] Демидов Т.И. Основания арифметики. М., Просвещение. 1963.

[2] Ершова Т.И. Числовые системы: Метод. разработка для практических занятий/ Свердл. пед. ин-т. Свердловск. 1981.

[3] Ершова Т.И. Построение систем целых и рациональных чисел: Метод. разработка для самостоятельной работы студентов/ Свердл. пед. ин-т. Свердловск. 1988.

[4] Ильиных А.П. Математическая логика: Учебное пособие/ Уральский гос. пед. университет. Екатеринбург. 2002

[5] Нечаев В.И. Числовые системы. М., Просвещение. 1975.

[6] Феферман С. Числовые системы. М., Наука. 1971.

Содержание